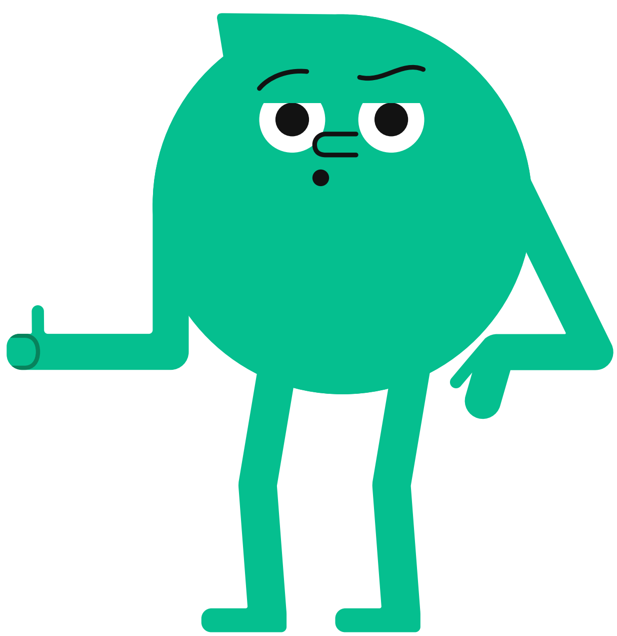
Simulation d'examen du ministère

alloprof
Plus d'astuces sur alloprof.ca

Mathématiques CST
Secondaire 4

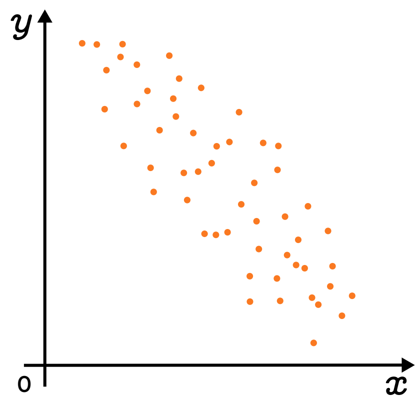
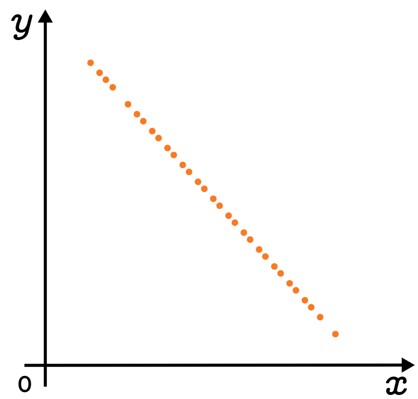
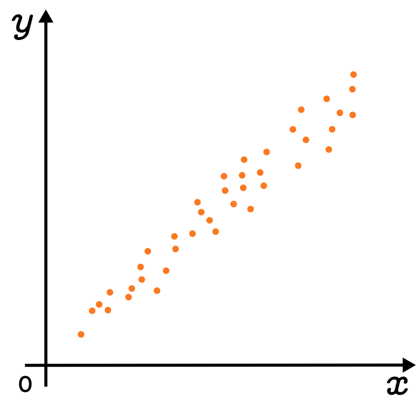


Corrigé

Section A

Question 1

Place les nuages de points suivants en ordre **décroissant** de **coefficient** de corrélation linéaire.

A	B	C
		

a) B > C > A
b) A < C < B
c) C > A > B
d) B < A < C

Réponse : c) C > A > B

Explications

Le nuage de points **C** est le seul qui montre une tendance **croissante**. C'est donc le seul qui a un coefficient de corrélation **positif**. Par conséquent, il est assuré d'avoir le plus grand coefficient de corrélation, puisque les 2 autres sont négatifs.

Astuce : Comme il faut les classer en *ordre décroissant*, il est certain que la bonne réponse doit commencer par **C**. **Par élimination**, on peut retrancher les choix a), b) et d).

Allons plus en détail. Commençons par donner une estimation des coefficients de corrélation des 3 nuages de points.

- Le graphique **A** montre une corrélation **décroissante faible**. Donc, $\mathbf{r_A \approx -0,6}$.
- Le graphique **B** montre une corrélation **décroissante parfaite**. Donc $\mathbf{r_B = -1}$.
- Le graphique **C** montre une corrélation **croissante moyenne**. Donc, $\mathbf{r_C \approx +0,8}$.

Ainsi, en ordre décroissant, on obtient bel et bien +0,8 > −0,6 > −1, soit le choix **c) C > A > B**. Le choix **d) B < A < C** n'est donc pas la bonne réponse, car c'est placé en ordre croissant et non décroissant.

Si on avait demandé de classer les nuages de points en ordre de **force** de corrélation, il aurait fallu ignorer les signes + et –.

• Le nuage de points qui montre la corrélation la moins forte est le graphique A.
• La corrélation linéaire du nuage de points C est plus forte que la A.
• La corrélation du nuage de points B est encore plus forte, puisqu’elle est parfaite.

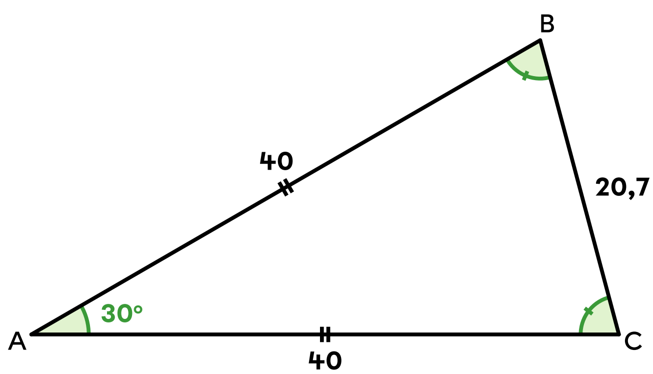
Ainsi, de la plus faible à la plus forte corrélation (sans tenir compte des signes), l’ordre est le choix **b) A < C < B**. Et, de la plus forte à la plus faible corrélation, c’est l’ordre inverse, soit le choix **a) B > C > A**.

À retenir : À l’examen, il faut porter attention à l’ordre demandé (croissant ou décroissant) et à ce qu’il faut ordonner, soit les **coefficients** de corrélation (tenir compte des signes) ou les **forces** de corrélation (ignorer les signes).

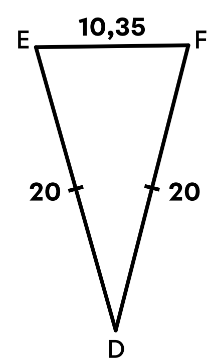
Question 2

Trouve l’intrus.
Les triangles suivants sont semblables, sauf un. Lequel?

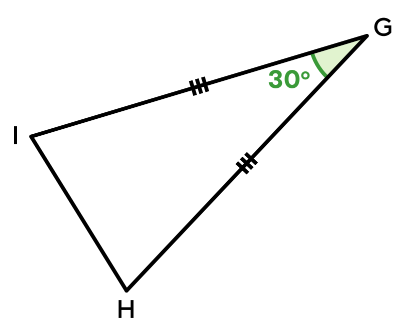
A



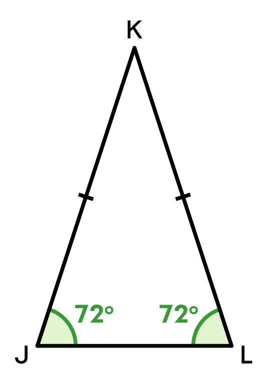
B



C



D



Réponse : d) le triangle JKL

- Le triangle ABC est semblable au triangle DEF par **CCC** : des triangles sont semblables si leurs côtés homologues sont proportionnels.

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\text{m}\overline{AB}}{\text{m}\overline{DE}} & = & \dfrac{\text{m}\overline{AC}}{\text{m}\overline{DF}} & = & \dfrac{\text{m}\overline{BC}}{\text{m}\overline{EF}} \\ \dfrac{40}{20} & = & \dfrac{40}{20} & = & \dfrac{20{,}7}{10{,}35} \\ 2 & = & 2 & = & 2 \end{array}$$

- Le triangle ABC est semblable au triangle GHI par **CAC** : des triangles sont semblables s'ils ont 1 paire d'angles isométriques compris entre 2 paires de côtés proportionnels.

  - $\text{m}\angle BAC = \text{m}\angle HGI = 30^\circ$
  - $$\begin{array}{ccc} \dfrac{\text{m}\overline{AB}}{\text{m}\overline{GH}} & = & \dfrac{\text{m}\overline{AC}}{\text{m}\overline{GI}} \\ \dfrac{40}{\text{m}\overline{GH}} & = & \dfrac{40}{\text{m}\overline{GI}} \end{array}$$

  Cette égalité est vraie, car les segments GH et GI sont isométriques.

  Remarque : Dans ces 2 triangles, les angles isométriques sont bel et bien situés entre les côtés proportionnels.

Comme le triangle ABC est semblable au triangle DEF **et** au triangle GHI, on peut affirmer, par transitivité, que les triangles DEF et GHI sont semblables entre eux. Autrement dit, nous avons déjà repéré les 3 triangles semblables. Par élimination, l'autre triangle, soit le triangle KJL est l'intrus recherché. Maintenant, voici pourquoi.

- Les triangles ABC et KJL paraissent semblables par AA (des triangles sont semblables s'ils ont 2 paires d'angles isométriques), mais ne le sont pas. Les angles B et C sont isométriques entre eux. Il en est de même pour les angles J et L, mais ça ne veut pas dire que l'angle C est isométrique à l'angle J. Vérifions-le.
  Dans le triangle ABC, l'angle A mesure 30°. Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180°, on peut calculer la mesure des angles B et C.

$$\text{m}\angle B = \text{m}\angle C = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

  Or, dans le triangle KJL, les angles J et L mesurent 72° et non 75°.

Remarques :

1. Les conditions d'isométrie des triangles sont pratiquement identiques aux conditions de similitude.
   - Pour CCC et pour CAC, les côtés doivent être *isométriques* au lieu d'être *proportionnels*.
   - Au lieu de **AA**, il faut plutôt utiliser **ACA** : des triangles sont isométriques s'ils ont 1 paire de côtés isométriques compris entre 2 paires d'angles homologues isométriques.

2. Avant d'utiliser les conditions minimales de similitude ou d'isométrie, il est parfois possible de trouver les mesures manquantes des triangles en utilisant la loi des cosinus et la loi des sinus. Toutefois, ce n'est généralement pas nécessaire.

Section B

Question 3

Soit une parabole passant par le point (8, 48). Quelle est l'abscisse, en notation fractionnaire, du ou des points de la parabole dont l'ordonnée vaut $\frac{4}{27}$?

Réponse : Le ou les points dont l'ordonnée vaut $\frac{4}{27}$ ont comme abscisse **- 4 / 9 et 4 / 9**.

Explications

1. Trouver la règle de la parabole.

   On calcule le paramètre a à l'aide du point (8, 48).

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 \\ 48 &= a(8)^2 \\ 48 &= 64a \\ \frac{48}{64} &= a \\ \frac{3}{4} &= a \end{aligned}$$

   On obtient alors la règle suivante.

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2$$

2. Calculer les abscisses lorsque l'ordonnée vaut $\frac{4}{27}$.

   On remplace *f(x)* par $\frac{4}{27}$, puis on isole *x*.

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2$$
$$\frac{4}{27} = \frac{3}{4}x^2$$
$$\frac{4}{27} \times \frac{4}{3} = x^2$$
$$\frac{16}{81} = x^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{16}{81}} = x$$
$$\pm\frac{4}{9} = x$$

   On obtient alors les points $\left(\frac{-4}{9}, \frac{4}{27}\right)$ et $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{27}\right)$

Question 4

L'an passé, Marie a mis sur pied une nouvelle entreprise pour son studio de danse latine. Ses affaires vont bien et elle désire donc augmenter sa clientèle. Pour y arriver, elle décide d'effectuer une étude statistique de ses clients actuels afin de mieux cibler d'autres clients potentiels dans sa campagne publicitaire. À cette fin, elle a colligé l'âge des danseuses et des danseurs dans le diagramme à tige et à feuilles suivant.

Femmes		Hommes
9-5	2	
8-7-6-6-4-1	3	5-9
8-5-4-2	4	3-3-7-8
3-1	5	1-2-2-4

Aide Marie à calculer l'âge moyen des femmes, l'âge moyen des hommes, ainsi que l'écart moyen pour l'ensemble des participants. Arrondis tes réponses au dixième près.

Réponse :
- L'âge moyen des femmes est de 39,2 ans.
- L'âge moyen des hommes est de 46,4 ans.
- L'écart moyen pour l'âge des hommes et des femmes est de 6,9 ans.

Explications

Rappel : Dans un diagramme à tige et à feuilles, chaque chiffre dans la colonne du milieu (la tige) correspond au premier chiffre d'une donnée, alors que les chiffres des 2 autres colonnes composent le reste de la donnée.

1. Calculer la moyenne d'âge des femmes

   Dressons d'abord la liste des âges pour toutes les femmes selon le diagramme à tige et à feuilles.

   25, 29, 31, 34, 36, 36, 37, 38, 42, 44, 45, 48, 51, 53

   Calculons maintenant la moyenne.

$$\begin{aligned}\overline{x}_{\text{femmes}} &= \frac{\Sigma\ x_i}{n_{\text{femmes}}}\\ &= \frac{25+29+31+...+48+51+53}{14}\\ &\approx 39{,}2\end{aligned}$$

   L'âge moyen des femmes est donc d'environ 39,2 ans.

2. Calculer la moyenne d'âge des hommes

   Dressons d'abord la liste des âges pour tous les hommes selon le diagramme à tige et à feuilles.

   35, 39, 43, 43, 47, 48, 51, 52, 52, 54

   Calculons maintenant la moyenne.

$$\begin{aligned}\overline{x}_{\text{hommes}} &= \frac{\Sigma\ x_i}{n_{\text{hommes}}}\\ &= \frac{35+39+43+...+52+52+54}{10}\\ &= 46{,}4\end{aligned}$$

   L'âge moyen des hommes est donc d'environ 46,4 ans.

3. Calculer l'écart moyen pour l'ensemble des participants

   La formule pour calculer l'écart moyen est la suivante.

$$EM = \frac{\Sigma\ |x_i - \overline{x}|}{n}$$

   Décortiquons ce calcul en 3 sous-étapes.

a) Calculer la moyenne globale $\overline{x}$

On peut se servir des moyennes calculées aux étapes 1 et 2 afin de calculer la moyenne globale $\overline{x}$. Pour y arriver, il suffit de faire une moyenne pondérée de ces 2 valeurs en tenant compte du nombre de femmes et du nombre d'hommes dans le studio de danse.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_{\text{femmes}}\,\overline{x}_{\text{femmes}} + n_{\text{hommes}}\,\overline{x}_{\text{hommes}}}{n_{\text{femmes}} + n_{\text{hommes}}} \\ &= \frac{14 \times 39{,}2 + 10 \times 46{,}4}{14 + 10} \\ &= 42{,}2\end{aligned}$$

b) Calculer les écarts à la moyenne

Maintenant qu'on connait la moyenne globale $\overline{x}$, on peut calculer l'écart à la moyenne pour chaque donnée de la distribution.

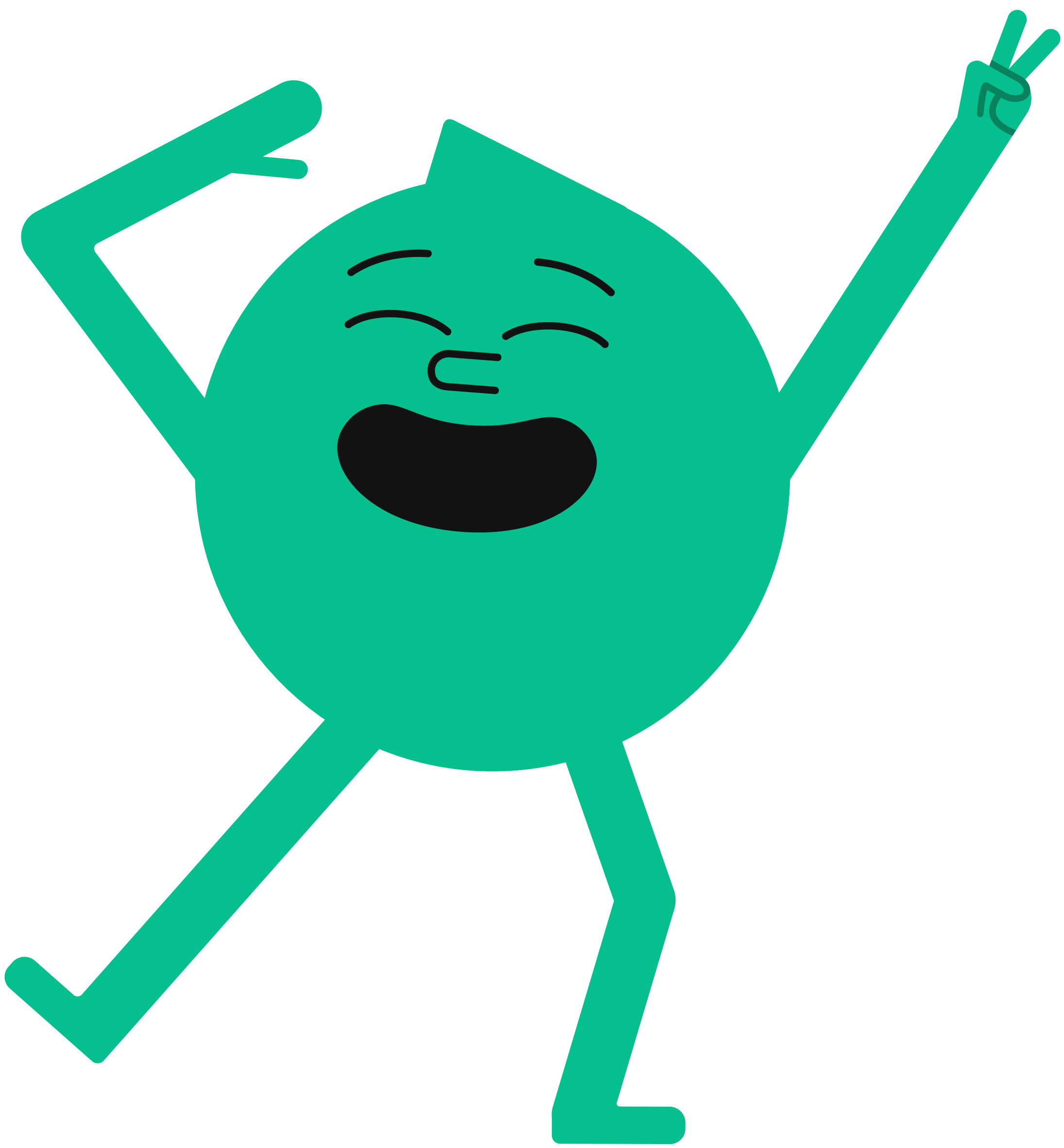
Femmes		Hommes	
Âge x_i	Écart à la moyenne $\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	Âge x_i	Écart à la moyenne $\lvert x_i - \overline{x}\rvert$
25	$\lvert 25 - 42{,}2\rvert = 17{,}2$	35	$\lvert 35 - 42{,}2\rvert = 7{,}2$
29	$\lvert 29 - 42{,}2\rvert = 13{,}2$	39	$\lvert 39 - 42{,}2\rvert = 3{,}2$
31	$\lvert 31 - 42{,}2\rvert = 11{,}2$	43	$\lvert 43 - 42{,}2\rvert = 0{,}8$
34	$\lvert 34 - 42{,}2\rvert = 8{,}2$	43	$\lvert 43 - 42{,}2\rvert = 0{,}8$
36	$\lvert 36 - 42{,}2\rvert = 6{,}2$	47	$\lvert 47 - 42{,}2\rvert = 4{,}8$
36	$\lvert 36 - 42{,}2\rvert = 6{,}2$	48	$\lvert 48 - 42{,}2\rvert = 5{,}8$
37	$\lvert 37 - 42{,}2\rvert = 5{,}2$	51	$\lvert 51 - 42{,}2\rvert = 8{,}8$
38	$\lvert 38 - 42{,}2\rvert = 4{,}2$	52	$\lvert 52 - 42{,}2\rvert = 9{,}8$
42	$\lvert 42 - 42{,}2\rvert = 0{,}2$	52	$\lvert 52 - 42{,}2\rvert = 9{,}8$
44	$\lvert 44 - 42{,}2\rvert = 1{,}8$	54	$\lvert 54 - 42{,}2\rvert = 11{,}8$
45	$\lvert 45 - 42{,}2\rvert = 2{,}8$		
48	$\lvert 48 - 42{,}2\rvert = 5{,}8$		
51	$\lvert 51 - 42{,}2\rvert = 8{,}8$		
53	$\lvert 53 - 42{,}2\rvert = 10{,}8$		

c) Calculer l'écart moyen

Il ne reste qu'à effectuer le calcul final en additionnant tous les écarts à la moyenne, puis en divisant par le nombre total de clients.

$$\begin{aligned} EM &= \frac{\Sigma\ |x_i - \overline{x}|}{n} \\ &= \frac{17{,}2 + 13{,}2 + 11{,}2 + \ldots + 9{,}8 + 9{,}8 + 11{,}8}{14 + 10} \\ &\approx 6{,}9 \end{aligned}$$

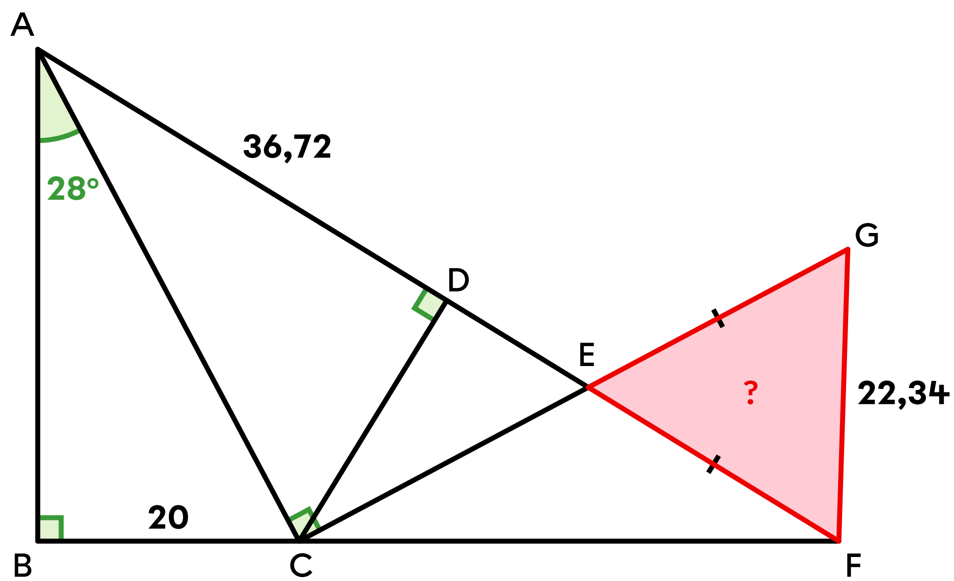
L'écart moyen pour l'âge des danseuses et des danseurs du studio de Marie est d'environ 6,9 ans.



Section C

Question 5

Quelle est l'aire du triangle GEF?



Plusieurs démarches sont possibles. En voici une.

1. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{AC}}$

$$\sin(A) = \frac{\mathrm{m}BC}{\mathrm{m}\overline{AC}}$$
$$\sin(28°) = \frac{20}{\mathrm{m}\overline{AC}}$$
$$\mathrm{m}\overline{AC} = \frac{20}{\sin(28°)}$$
$$\mathrm{m}\overline{AC} \approx 42{,}6$$

2. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{AE}}$

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), chaque cathète ($\overline{\mathrm{AC}}$) est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse ($\overline{\mathrm{AD}}$) et l'hypoténuse entière ($\overline{\mathrm{AE}}$).

$$\frac{\mathrm{m}\overline{AD}}{\mathrm{m}\overline{AC}} = \frac{\mathrm{m}\overline{AC}}{\mathrm{m}\overline{AE}}$$

$$\mathrm{m}\overline{AC}^2 = \mathrm{m}\overline{AD} \times \mathrm{m}\overline{AE}$$

$$42{,}6^2 = 36{,}72 \times \mathrm{m}\overline{AE}$$

$$49{,}42 \approx \mathrm{m}\overline{AE}$$

3. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{DE}}$

   Les points A, D et E sont alignés. Ainsi, $\mathrm{m}\overline{\mathrm{AE}} = \mathrm{m}\overline{\mathrm{AD}} + \mathrm{m}\overline{\mathrm{DE}}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\overline{DE} &= \mathrm{m}\overline{AE} - \mathrm{m}\overline{AD}\\ &= 49{,}42 - 36{,}72\\ &= 12{,}7\end{aligned}$$

4. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{CD}}$

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), la hauteur issue de l'angle droit ($\overline{\mathrm{CD}}$) est moyenne proportionnelle entre les 2 segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse ($\overline{\mathrm{AD}}$ et $\overline{\mathrm{DE}}$).

$$\frac{\mathrm{m}\overline{AD}}{\mathrm{m}\overline{CD}} = \frac{\mathrm{m}\overline{CD}}{\mathrm{m}\overline{DE}}$$

$$\mathrm{m}\overline{CD}^2 = \mathrm{m}\overline{AD} \times \mathrm{m}\overline{DE}$$

$$\mathrm{m}\overline{CD} = \sqrt{36{,}72 \times 12{,}7}$$

$$\mathrm{m}\overline{CD} \approx 21{,}59$$

5. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{CE}}$

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), le produit de l'hypoténuse ($\overline{\mathrm{AE}}$) et de la hauteur correspondante ($\overline{\mathrm{CD}}$) est égal au produit des cathètes ($\overline{\mathrm{AC}}$ et $\overline{\mathrm{CE}}$).

$$\mathrm{m}AE \times \mathrm{m}CD = \mathrm{m}AC \times \mathrm{m}CE$$

$$49{,}42 \times 21{,}59 = 42{,}6 \times \mathrm{m}\overline{CE}$$

$$\mathrm{m}\overline{CE} = \frac{49{,}42 \times 21{,}59}{42{,}6}$$

$$\mathrm{m}\overline{CE} \approx 25{,}05$$

6. Calculer la mesure des angles DEC, ACB, ECF, CEF et CFE

Le triangle DEC étant rectangle en D, on peut utiliser un rapport trigonométrique.

$$\begin{aligned}\tan(\angle DEC) &= \frac{\mathrm{m}\overline{CD}}{\mathrm{m}\overline{DE}}\\ &= \frac{21{,}59}{12{,}7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle DEC &= \tan^{-1}\left(\frac{21{,}59}{12{,}7}\right)\\ &\approx 59{,}5^\circ\end{aligned}$$

Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°, on peut trouver la mesure de l'angle ACB.

$$\mathrm{m}\angle ACB = 180^\circ - \mathrm{m}\angle ABC - \mathrm{m}\angle CAB$$
$$\mathrm{m}\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ$$
$$\mathrm{m}\angle ACB = 62^\circ$$

Comme les angles ACB, ACE et ECF forment un angle plat (180°), on peut trouver la mesure de l'angle ECF.

$$\mathrm{m}\angle ECF = 180^\circ - \mathrm{m}\angle ACB - \mathrm{m}\angle ACE$$
$$\mathrm{m}\angle ECF = 180^\circ - 62^\circ - 90^\circ$$
$$\mathrm{m}\angle ECF = 28^\circ$$

Les angles DEC et CEF forment aussi un angle plat.

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle CEF &= 180^\circ - \mathrm{m}\angle DEC\\ &= 180^\circ - 59{,}5^\circ\\ &= 120{,}5^\circ\end{aligned}$$

Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°, on peut trouver la mesure de l'angle CFE.

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle CFE &= 180^\circ - \mathrm{m}\angle CEF - \mathrm{m}\angle ECF\\ &= 180^\circ - 120{,}5^\circ - 28^\circ\\ &= 31{,}5^\circ\end{aligned}$$

7. Calculer la mesure des segments $\overline{\text{EF}}$ et $\overline{\text{EG}}$

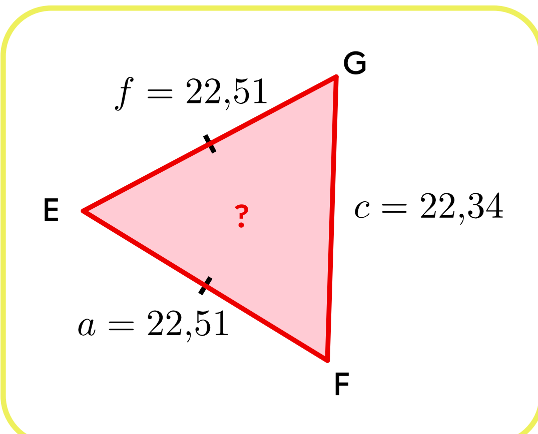
   On utilise la loi des sinus dans le triangle CEF.

$$\begin{aligned}\frac{\text{m}EF}{\sin(\angle ECF)} &= \frac{\text{m}CE}{\sin(\angle CFE)}\\ \frac{\text{m}\overline{EF}}{\sin(28°)} &= \frac{25{,}05}{\sin(31{,}5°)}\\ \text{m}\overline{EF} &= \frac{25{,}05 \times \sin(28°)}{\sin(31{,}5°)}\\ &\approx 22{,}51\end{aligned}$$

   Ainsi, le segment $\overline{\text{EG}}$ mesure également 22,51 unités puisqu'il est indiqué sur la figure que $\overline{\text{EF}}$ et $\overline{\text{EG}}$ sont isométriques.

8. Calculer l'aire du triangle GEF

   Comme on a les 3 côtés du triangle GEF, on utilise la formule de Héron.



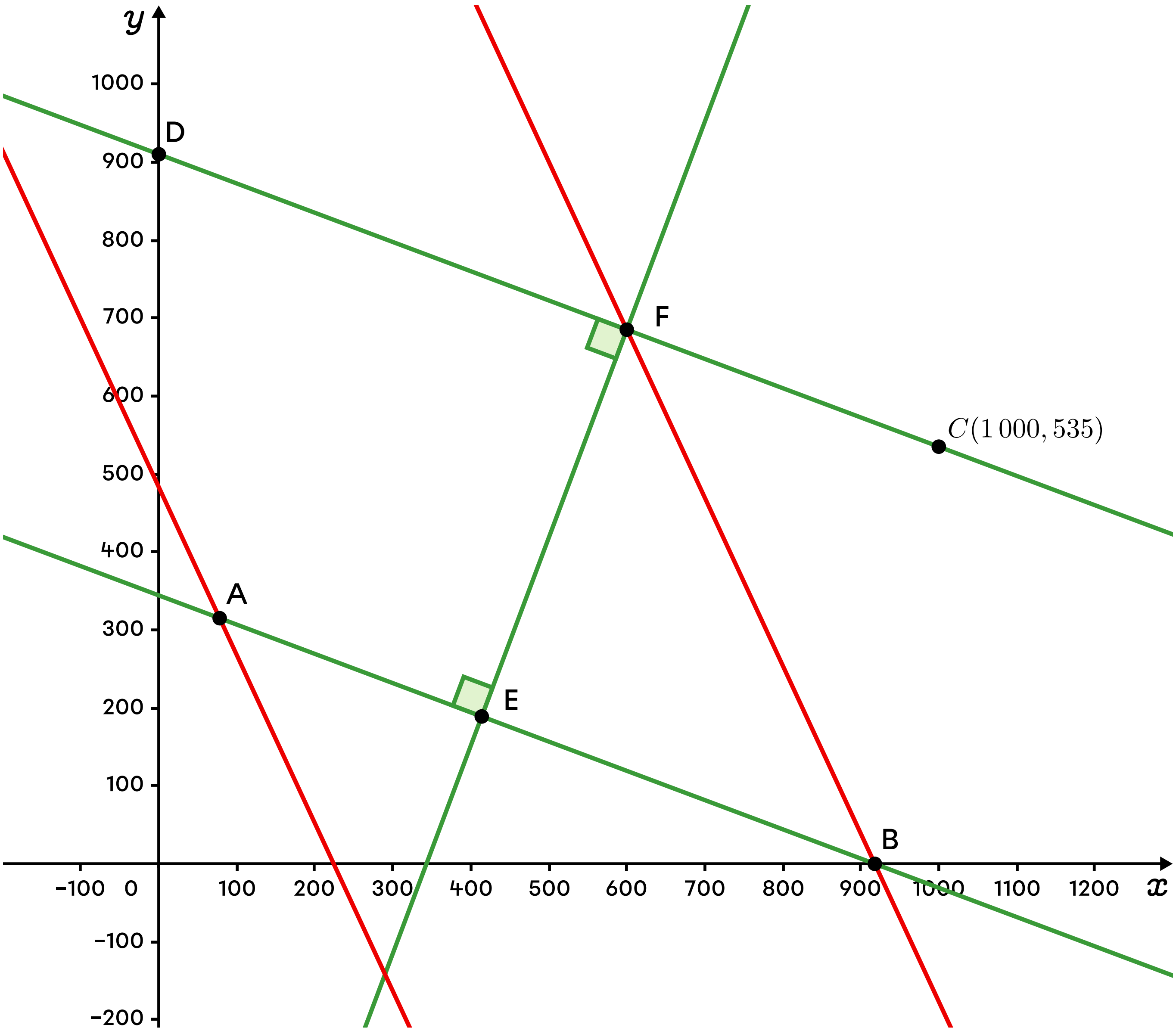
   On calcule d'abord le demi-périmètre (p) du triangle.

$$\begin{aligned}p &= \frac{a+b+c}{2}\\ &= \frac{22{,}51+22{,}51+22{,}34}{2}\\ &= 33{,}68\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\ &= \sqrt{33{,}68(33{,}68-22{,}51)(33{,}68-22{,}51)(33{,}68-22{,}34)}\\ &\approx 218{,}3\end{aligned}$$

Réponse : Le triangle GEF a une aire d'environ 218,3 unités carrées.

Question 6



Deux trajets permettent d’aller du point B au point D : le trajet BFD et le trajet BEFD. Afin de déterminer le trajet le plus rapide, il faut calculer la longueur, puis la durée de chaque trajet en tenant compte des limites de vitesse. Pour y arriver, il faut d’abord déterminer les coordonnées de chaque point du graphique.

1. Déterminer les coordonnées des points.

   a) Trouver les coordonnées du point A.

   Dans la règle de la droite AB, on remplace x par 78 et on isole y.

$$y = -\frac{3}{8}\boldsymbol{x} + 344{,}25$$
$$y = -\frac{3}{8}\mathbf{(78)} + 344{,}25$$
$$y = 315$$

   Ainsi, les coordonnées du point A sont (78, 315).

   b) Trouver les coordonnées du point B.

   Puisque B est situé sur l'axe des x, son ordonnée vaut 0.

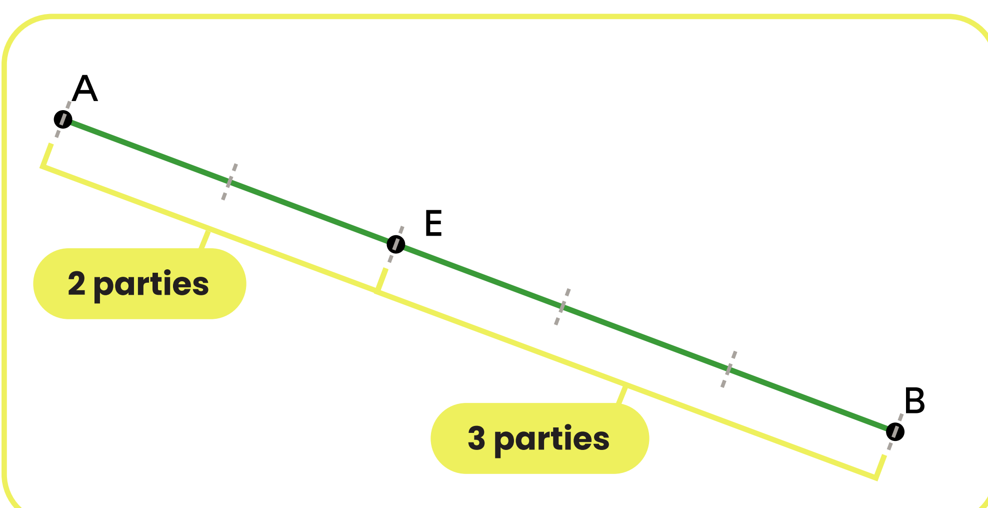
$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= -\frac{3}{8}x + 344{,}25 \\ \mathbf{0} &= -\frac{3}{8}x + 344{,}25 \\ -344{,}25 &= -\frac{3}{8}x \\ 918 &= x \end{aligned}$$

   Ainsi, les coordonnées du point B sont (918, 0).

   c) Trouver les coordonnées du point E.

   On utilise la formule du point de partage.

   D'abord, il faut déterminer dans quel rapport partie-tout le point E partage le segment $\overline{BA}$. Le rapport donné (3:2) est un rapport partie-partie.
   S'il y a 3 « parties » du point B au point E et 2 autres « parties » du point E au point A, c'est qu'il y a 5 « parties » en tout.



Donc, puisque le point de départ est B, on doit utiliser la fraction $\frac{3}{5}$.
(Si on choisit de prendre le point A comme départ, alors il faut utiliser la fraction $\frac{2}{5}$).

$$\begin{aligned}(x_E, y_E) &= \left(x_B + \frac{3}{5}(x_A - x_B), y_B + \frac{3}{5}(y_A - y_B)\right)\\ &= \left(918 + \frac{3}{5}(78 - 918), 0 + \frac{3}{5}(315 - 0)\right)\\ &= (414, 189)\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du point E sont (414, 189).

d) Déterminer la pente de la droite AB.

La règle de la droite AB est $y = -\frac{3}{8}x + 344{,}25$. Puisqu'elle est écrite sous la forme $y = ax + b$, la pente, soit le taux de variation, correspond au coefficient a placé devant la variable x.

Ainsi, la pente de la droite AB vaut $-\frac{3}{8}$.

e) Calculer la règle de la droite EF.

Comme les droites EF et AB sont perpendiculaires, le produit de leurs pentes vaut -1.

$$\begin{aligned}a_{AB} \times a_{EF} &= -1\\ a_{EF} &= \frac{-1}{a_{AB}}\\ a_{EF} &= \frac{-1}{-\frac{3}{8}}\\ a_{EF} &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Remarque : Une autre explication possible est la suivante. Les droite EF et AB étant perpendiculaires, elles ont des pentes qui sont de signes contraires et qui sont des fractions inverses. $-\frac{3}{8} \rightarrow +\frac{8}{3}$

En utilisant la pente de EF et les coordonnées du point E, on trouve la règle de la droite EF.

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= \frac{8}{3}x + b \\ 189 &= \frac{8}{3}(414) + b \\ 189 &= 1\ 104 + b \\ -915 &= b \end{aligned}$$

Ainsi, la règle de la droite EF est : $y = \frac{8}{3}x - 915$.

f) Déterminer la règle de la droite CD et les coordonnées du point D

Comme les droites AB et CD sont toutes les 2 perpendiculaires à la droite EF, elles sont parallèles entre elles. Par conséquent, AB et CD ont la même pente.

$$a_{AB} = a_{CD} = -\frac{3}{8}$$

En utilisant la pente de CD et les coordonnées du point C, on trouve la règle de la droite CD.

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= -\frac{3}{8}x + b \\ 535 &= -\frac{3}{8}(1\,000) + b \\ 535 &= -375 + b \\ 910 &= b \end{aligned}$$

Ainsi, la règle de la droite CD est : $y = -\frac{3}{8}x + 910$.

→ L'ordonnée à l'origine de la droite CD, correspond à l'ordonnée du point D étant donné que D est situé sur l'axe des y. Ainsi, les coordonnées de D sont (0, 910).

g) Trouver les coordonnées du point F.

Le point F est situé à l'intersection des droites CD et EF. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on utilise la méthode de comparaison.

$$\begin{aligned} y_{CD} &= y_{EF} \\ -\frac{3}{8}x + 910 &= \frac{8}{3}x - 915 \\ 910 + 915 &= \frac{8}{3}x + \frac{3}{8}x \\ 1\ 825 &= \frac{73}{24}x \\ 600 &= x \end{aligned}$$

On remplace x par 600 dans la règle de la droite CD pour trouver l'ordonnée du point F.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{8}\boldsymbol{x} + 910 \\ y &= -\frac{3}{8}\mathbf{(600)} + 910 \\ y &= 685 \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du point F sont : (600, 685).

Remarque : Il est également possible de remplacer x par 600 dans la règle de la droite EF.

2. Calculer les mesures des segments BE, BF, EF et DF.

On utilise la formule de distance entre 2 points.

$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
$\text{dist}(B, E) = \sqrt{(414 - 918)^2 + (189 - 0)^2}$ $\text{m}\overline{BE} \approx 538{,}27\ \text{m}$	$\text{dist}(E, F) = \sqrt{(600 - 414)^2 + (685 - 189)^2}$ $\text{m}\overline{EF} \approx 529{,}73\ \text{m}$
$\text{dist}(B, F) = \sqrt{(600 - 918)^2 + (685 - 0)^2}$ $\text{m}\overline{BF} \approx 755{,}21\ \text{m}$	$\text{dist}(D, F) = \sqrt{(600 - 0)^2 + (685 - 910)^2}$ $\text{m}\overline{DF} \approx 640{,}80\ \text{m}$

3. Calculer la durée de chaque trajet

Pour calculer la durée de chaque trajet, il faut utiliser la formule de la vitesse qui est fournie.

$$\text{Vitesse} = \frac{\text{Distance}}{\text{Temps}} \iff \text{Temps} = \frac{\text{Distance}}{\text{Vitesse}}$$

Les trajets possibles sont B → F → D et B → E → F → D.

a) Pour le trajet B → F → D, il faut considérer que le segment BF est limité à 30 km/h et que le segment FD est limité à 50 km/h. Toutes les distances calculées précédemment sont en mètres (m), donc il faut les convertir en kilomètres (km).

$$\begin{aligned}\text{Temps} &= \frac{\text{distance}(B,F)}{\text{vitesse}(B,F)} + \frac{\text{distance}(F,D)}{\text{vitesse}(F,D)}\\ &= \frac{0{,}755\,21\ \text{km}}{30\ \text{km/h}} + \frac{0{,}640\,80\ \text{km}}{50\ \text{km/h}}\\ &\approx 0{,}038\ \text{h}\\ &\approx 136{,}76\ \text{s}\end{aligned}$$

b) Pour le trajet B → E → F → D, la vitesse est limitée à 50 km/h.

$$\begin{aligned}\text{Temps} &= \frac{\text{distance totale}}{\text{vitesse}}\\ &= \frac{(0{,}538\,27 + 0{,}529\,73 + 0{,}640\,80)\ \text{km}}{50\ \text{km/h}}\\ &= \frac{1{,}708\,80\ \text{km}}{50\ \text{km/h}}\\ &\approx 0{,}034\ \text{h}\\ &\approx 123{,}03\ \text{s}\end{aligned}$$

Conclusion : Même si le trajet B → E → F → D est plus long (en distance) que le trajet B → F → D, il faut environ 13,73 s de moins pour le parcourir.

Remarque : Comme discuté dans la grande révision, cette mise en situation aurait pu être une **démonstration** ou une **conjecture**. Dans tous les cas, il faut faire la même démarche. C'est juste la conclusion qui change. Pour plus d'informations sur les conjectures et les démonstrations, consulte les fiches suivantes.

Les démonstrations

Les conjectures

Question 7

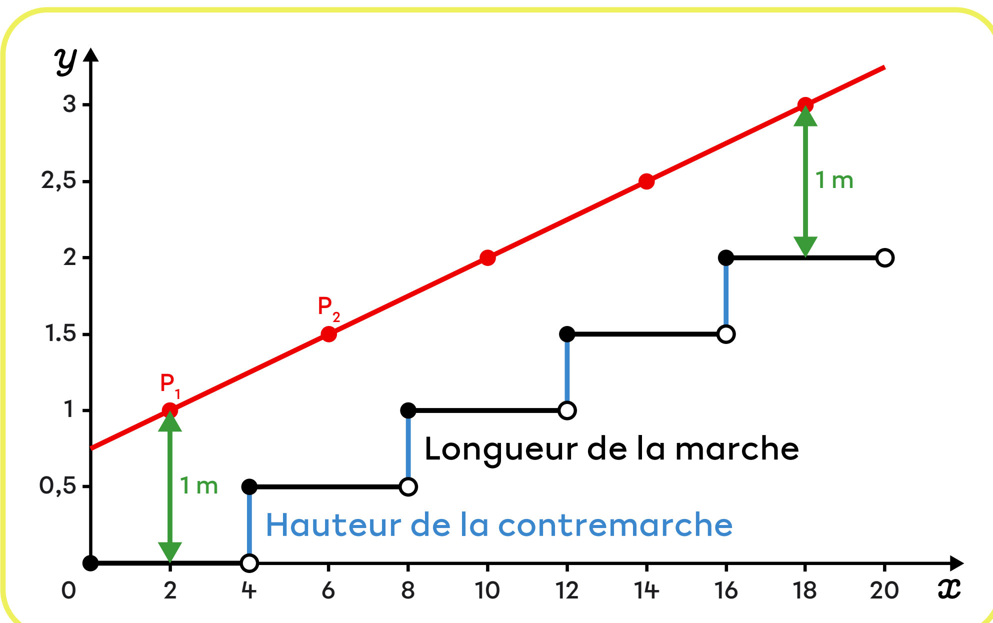
Indice : La consigne pourrait être reformulée de la façon suivante. À partir des paramètres a et b de la fonction f(x), comment peut-on trouver la règle de la fonction g(x)?

Lorsqu'on doit émettre une conjecture, il faut analyser au moins 3 cas. En général, on analyse le premier cas qui est fourni, puis on invente 2 autres cas.

Conseils et Astuces
Il faut faire des exemples variés. Choisis des nombres entiers, des nombres décimaux, des fractions, des nombres positifs, négatifs, etc. Si, par exemple, tu ne prends que des nombres entiers positifs, tu risques de ne pas trouver une conjecture suffisamment précise.

1er cas : L'escalier est croissant, la longueur est entière et la hauteur est décimale.
2e cas : L'escalier est croissant, la longueur et la hauteur sont entières.
3e cas : L'escalier est décroissant, la longueur et la hauteur sont décimales.

1er cas : Escalier croissant où la longueur est un nombre entier et la hauteur est un nombre décimal



1. Déterminer les dimensions de l'escalier à partir du graphique
   → La hauteur de chaque contremarche est de 0,5 m.
   → La longueur de chaque marche est de 4 m.

2. Déterminer la pente de la rampe

   a) Pour déterminer la pente de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
      → Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 4. Donc, les coordonnées de P_1 sont (2, 1).
      → Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2e marche, qui va de 4 à 8 à une hauteur de 0,5 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (6; 1,5).

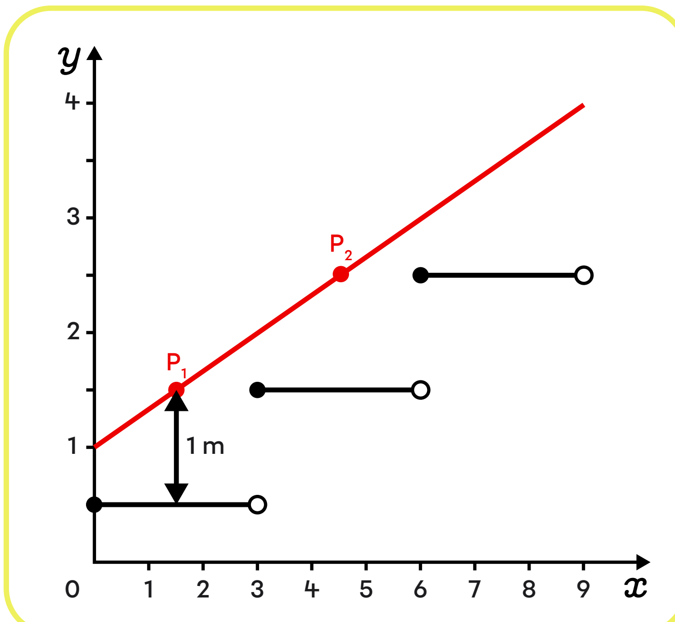
   b) On calcule la pente (a).

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1{,}5 - 1}{6 - 2} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2e cas : Escalier croissant où la longueur et la hauteur sont des nombres entiers

1. Choisir les dimensions de l'escalier et tracer le graphique

   Je choisis de faire un escalier **croissant** avec les valeurs suivantes.
   → Chaque contremarche sera d'une hauteur de 1 m.
   → Chaque marche aura une longueur de 3 m.



2. Déterminer la pente de la rampe

   a) Pour déterminer la pente de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
      → Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 3 à une hauteur de 0,5 m. Donc, les coordonnées de P_1 sont (1,5; 1,5).
      → Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2e marche, qui va de 3 à 6 à une hauteur de 1,5 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (4,5; 2,5).

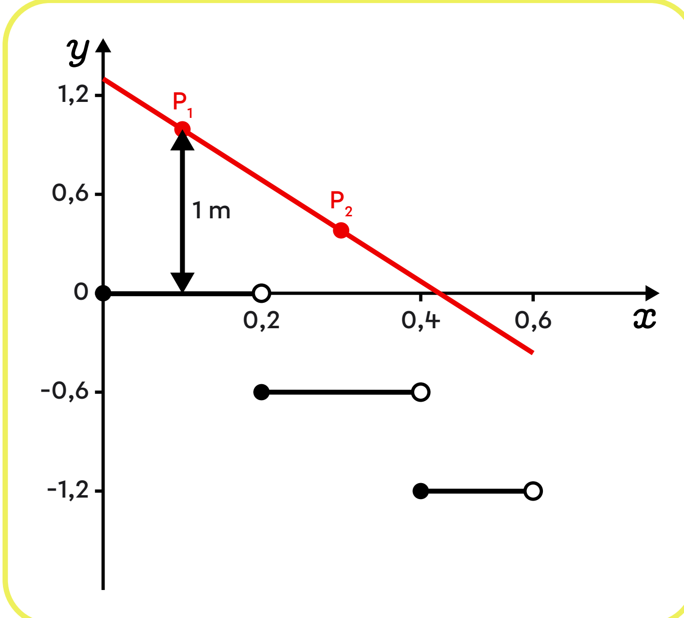
   b) On calcule la pente (a).

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{2{,}5 - 1{,}5}{4{,}5 - 1{,}5} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3e cas : Escalier décroissant où la longueur et la hauteur sont des nombres décimaux

1. Choisir les dimensions de l'escalier et tracer le graphique

   Je choisis de faire un escalier **décroissant** avec les valeurs suivantes.
   → Chaque contremarche sera d'une hauteur de 0,6 m.
   → Chaque marche aura une longueur de 0,2 m.

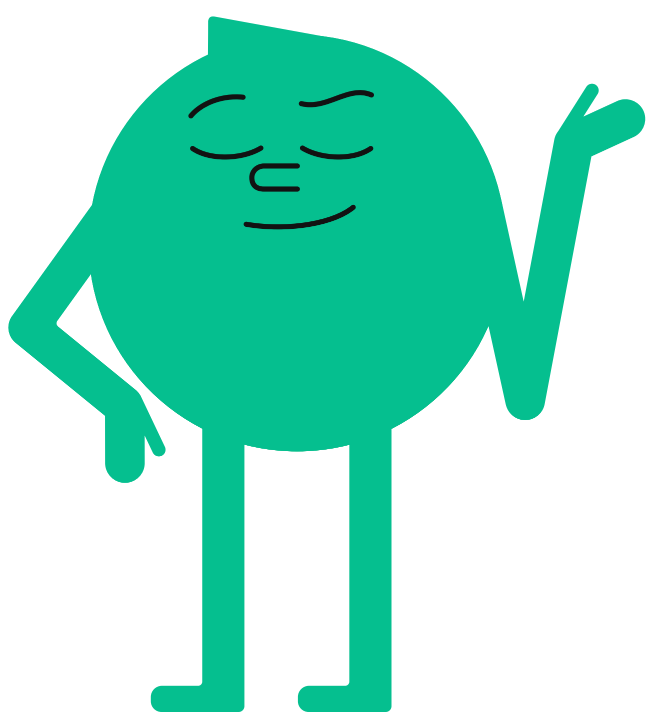


2. Déterminer la pente de la rampe

   a) Pour déterminer la pente de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
   → Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 0,2 à une hauteur de 0 m. Donc, les coordonnées de P_1 sont (0,1; 1).
   → Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2e marche, qui va de 0,2 à 0,4 à une hauteur de -0,6 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (0,3; 0,4).

   b) On calcule la pente (a).

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0{,}4 - 1}{0{,}3 - 0{,}1} \\ &= -3 \end{aligned}$$



Recherche des liens

Conseils et astuces

Il est souvent préférable de travailler avec des fractions pour mieux voir les liens. Par exemple, il est plus facile de voir que $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}$ que de voir que $0{,}5 \div 4 = 0{,}125$.

1er cas	$\text{Pente} = \dfrac{1}{8}$	$\text{Hauteur} = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$ $\text{Longueur} = 4$
2e cas	$\text{Pente} = \dfrac{1}{3}$	$\text{Hauteur} = 1$ $\text{Longueur} = 3$
3e cas	$\text{Pente} = -3$	$\text{Hauteur} = 0{,}6 = \dfrac{3}{5}$ $\text{Longueur} = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$

Trouver les liens, ça signifie qu'on doit se poser les questions suivantes.

- Comment obtenir $\frac{1}{8}$ à l'aide de $\frac{1}{2}$ et 4?
- Comment obtenir $\frac{1}{3}$ à l'aide de 1 et 3?
- Comment obtenir -3 à l'aide de $-\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{5}$?

Conseils et Astuces

- Essaie d'abord les opérations de base (addition, soustraction, multiplication et division).

Exemples

$\frac{1}{2} + 4 \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗ $\frac{1}{2} - 4 \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗

$\frac{1}{2} \times 4 \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗ $\frac{1}{2} \div 4 \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✓

Il faut vérifier si **le lien trouvé** fonctionne aussi dans les 2 autres cas.

- Analyse le graphique et fais appel à tes connaissances mathématiques.

Exemples
- La pente correspond à $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- La hauteur d'une contremarche peut être associée à Δy.
- La longueur d'une marche peut être associée à Δx.
- La droite passant par les points situés au début de chaque marche est parallèle à la rampe. Elles ont donc la même pente.
- La pente des 2 droites peut donc être calculée en faisant le calcul suivant.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Hauteur de la contremarche}}{\text{Longueur de la marche}}$$

- Porte une attention particulière aux signes (+ et −).

Exemples
- 1er cas : $\frac{1}{2} \div 4 \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✓
- 2e cas : $1 \div 3 = \frac{1}{3}$ ✓
- 3e cas : $\frac{3}{5} \div \frac{1}{5} = 3$ ✗ **La pente doit être de −3.**

On est prêt à formuler la réponse complète.

Conseils et astuces

- Il faut donner la réponse, c'est-à-dire sa conjecture, à l'aide de phrases complètes. Autrement dit, « a = Hauteur ÷ Longueur » n'est pas la réponse attendue, même s'il est permis de l'ajouter à sa conjecture.
- Plusieurs formulations différentes sont possibles.
- Il est préférable de donner un lien qui ne fonctionne pas dans tous les cas que de n'en donner aucun.

Réponse

La pente de la rampe (a) est égale au rapport entre la hauteur des contremarches et la longueur des marches lorsque l'escalier est croissant.
Si l'escalier est décroissant, alors la pente est égale à l'opposé de ce même rapport.

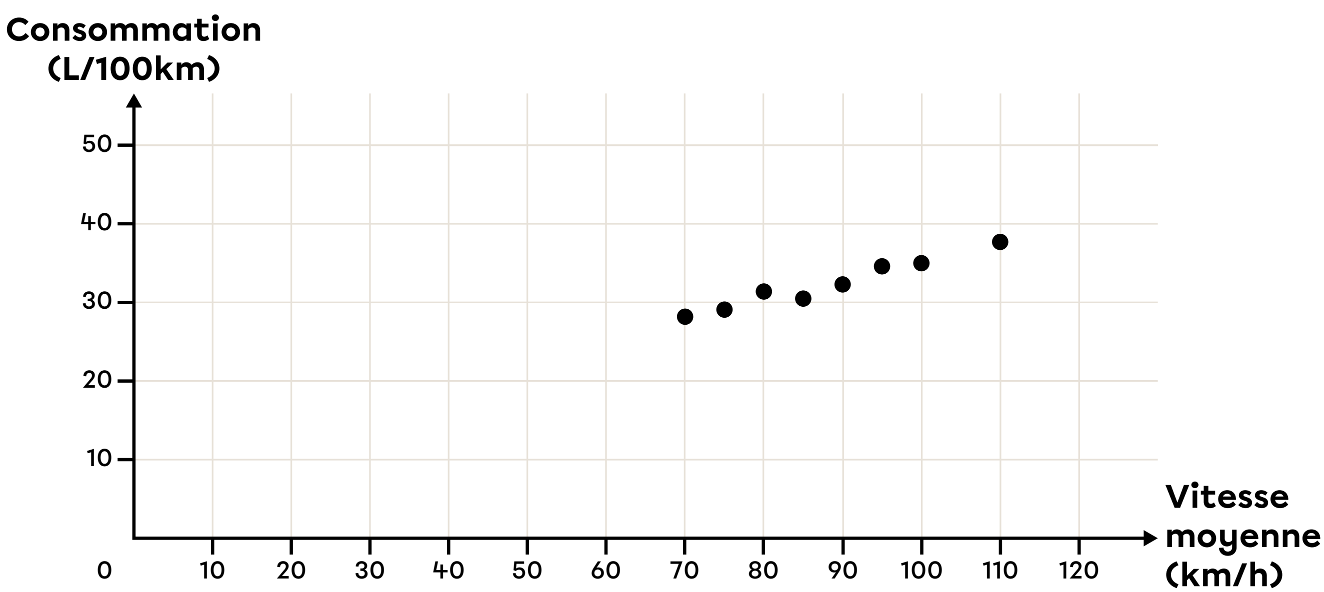
Remarque : Ta conjecture finale doit tenir compte du signe « moins » lorsque l'escalier est décroissant, sinon elle serait considérée comme incomplète.

Question 8

Voici les principales étapes de la résolution du problème : on doit déterminer l'équation de la droite de régression pour les données de la flotte MétaCargo et s'en servir pour calculer la consommation de carburant à 105 km/h. Ensuite, on doit trouver la règle de la consommation de carburant pour la flotte NovaFret et calculer la consommation de carburant à 105 km/h avec cette règle.

A. Commençons par la flotte **MétaCargo**.

On trace le nuage de points pour voir s'il y a une corrélation entre les variables ou non.



On observe bel et bien une corrélation positive entre les variables : plus la vitesse moyenne d'un camion est élevée et plus sa consommation d'essence augmente

On va donc trouver la règle de la droite de régression. On peut utiliser la méthode de Mayer ou la méthode médiane-médiane. Prenons celle de **Mayer**.

1. Ordonner les coordonnées selon la variable indépendante. C'est déjà le cas.

x : Vitesse moyenne (km/h)	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**95**	**100**	**110**
y : Consommation (L/100 km)	28,2	29,1	31,4	30,5	32,3	34,6	35,0	37,7

2. Séparer la distribution en 2 groupes égaux, si possible.

	1er groupe				2e groupe			
x : Vitesse moyenne (km/h)	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**95**	**100**	**110**
y : Consommation (L/100 km)	28,2	29,1	31,4	30,5	32,3	34,6	35,0	37,7

3. Calculer les **points moyens** de chaque groupe (P_1 et P_2).

	1er groupe	2e groupe
Moyenne des abscisses	$\overline{x}_1 = \dfrac{70 + 75 + 80 + 85}{4} = 77{,}5$	$\overline{x}_2 = \dfrac{90 + 95 + 100 + 110}{4} = 98{,}75$
Moyenne des ordonnées	$\overline{y}_1 = \dfrac{28{,}2 + 29{,}1 + 31{,}4 + 30{,}5}{4} = 29{,}8$	$\overline{y}_2 = \dfrac{32{,}3 + 34{,}6 + 35{,}0 + 37{,}7}{4} = 34{,}9$
Point moyen	P_1 (77,5; 29,8)	P_2 (98,75; 34,9)

4. Trouver la règle de la droite de régression ($y = ax + b$) passant par les points P_1 et P_2.

a) Calculer la pente (a).

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{34{,}9 - 29{,}8}{98{,}75 - 77{,}5} \\ &= \frac{5{,}1}{21{,}25} \\ &= 0{,}24 \end{aligned}$$

Ainsi, $y = 0{,}24x + b$.

b) Calculer la valeur de b à l'aide du point P_1 (77,5; 29,8).

$$\begin{aligned} y &= 0{,}24x + b \\ 29{,}8 &= 0{,}24(77{,}5) + b \\ 11{,}2 &= b \end{aligned}$$

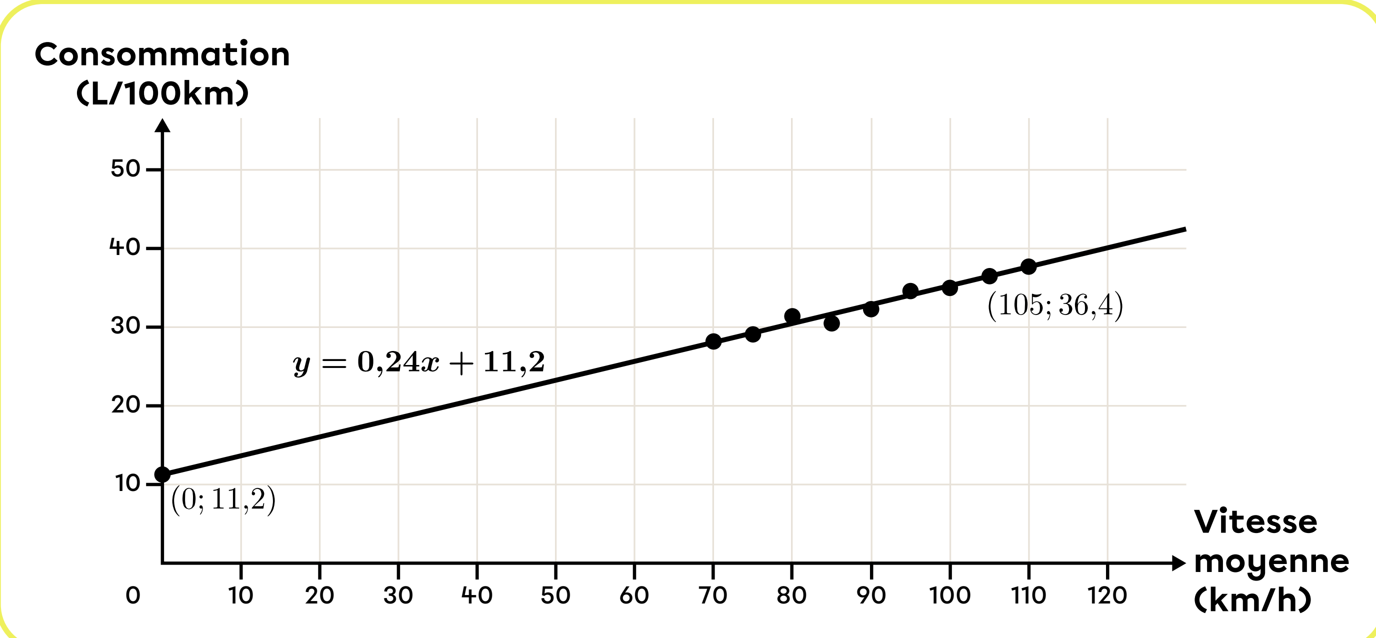
Ainsi, la règle de la droite de régression pour MétaCargo est : $y_1 = 0{,}24x + 11{,}2$.

Remarque : Si tu as utilisé la méthode médiane-médiane, tu devrais obtenir $y_1 = 0{,}236x + 11{,}18\overline{3}$.

5. Prédire la consommation de carburant à 105 km/h à l'aide de la règle de la droite.

Pour savoir quelle serait la consommation d'un camion roulant à une vitesse moyenne de 105 km/h, il faut remplacer x par 105 dans la règle de la droite de régression.

$$\begin{aligned} y_1 &= 0{,}24x + 11{,}2 \\ &= 0{,}24(105) + 11{,}2 \\ &= 36{,}4 \text{ L/100 km} \end{aligned}$$



B. NovaFret.

1. Trouver la règle de la fonction qui permet de calculer la consommation de carburant des camions **NovaFret**.
   - On a le modèle : $y = a(c)^x$.
   - On a l'ordonnée à l'origine, ce qui donne le point (0; 13,8). L'ordonnée à l'origine correspond au paramètre a. Donc, a = 13,8.
   - On sait que l'augmentation est de 1 % par km/h. Une augmentation de 1 % signifie que la base c vaut 1,01, car 100 % + 1 % = 101 % = 1,01.

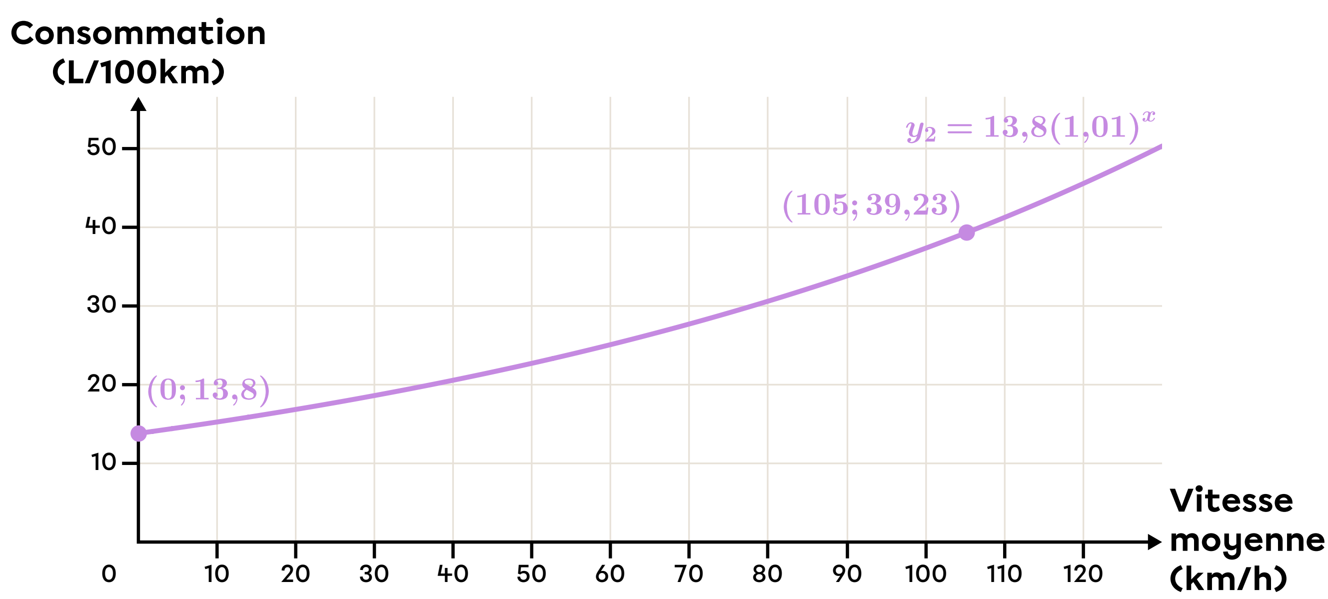
   Donc, la règle de la fonction qui donne la consommation de carburant (C(x)) en fonction de la vitesse moyenne (x) est la suivante.

   $$y_2 = 13{,}8(1{,}01)^x$$

2. Calculer la consommation de carburant à 105 km/h.

   On remplace x par 105 dans la règle.

   $$\begin{aligned} y_2 &= 13{,}8(1{,}01)^x \\ &= 13{,}8(1{,}01)^{105} \\ &\approx 39{,}23 \text{ L/100 km} \end{aligned}$$



Réponse : Comme la vitesse moyenne sur le trajet est de 105 km/h, il faudrait prendre les camions de la flotte **MétaCargo**.

Justification : Selon la droite de régression, la consommation de carburant des camions de la flotte MétaCargo à 105 km/h est d'environ 36,4 L/100 km, ce qui est inférieur à celle des camions de la flotte NovaFret qui est d'environ 39,23 L/100 km.