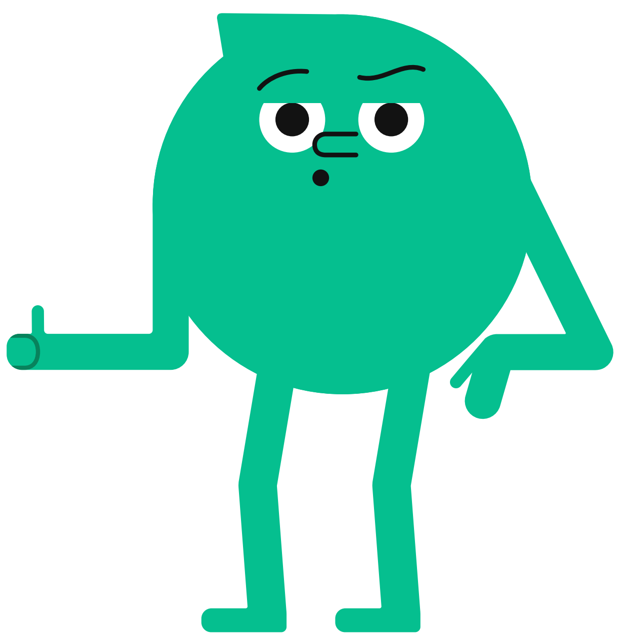
Simulation d'examen du ministère

alloprof
Plus d'astuces sur alloprof.ca

Mathématiques TS
Secondaire 4

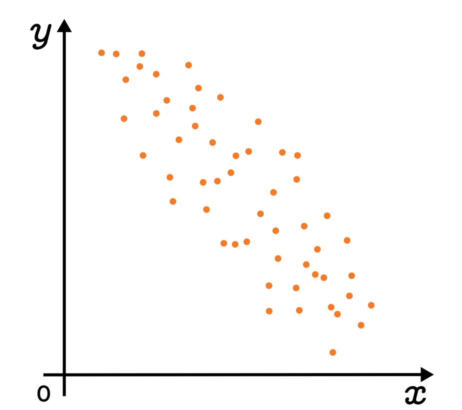
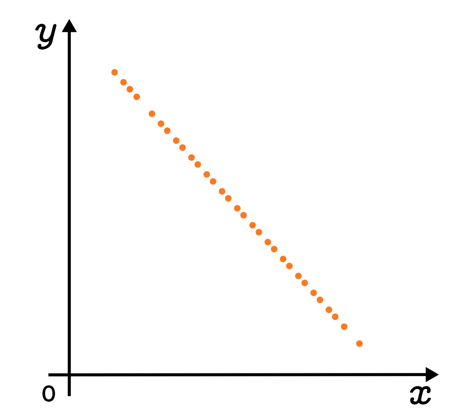
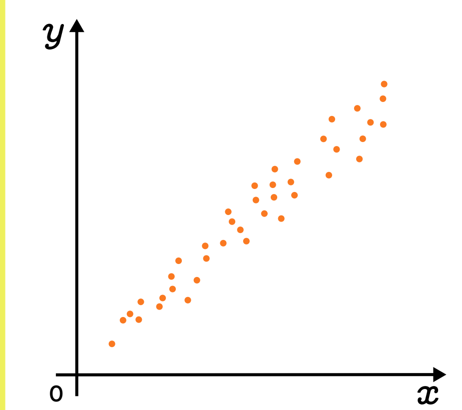


Corrigé

Section A

Question 1

Place les nuages de points suivants en ordre **décroissant** de **coefficient** de corrélation linéaire.

A	B	C
		

a) B > C > A
b) A < C < B
c) C > A > B
d) B < A < C

Réponse : c) C > A > B

Explications

Le nuage de points **C** est le seul qui montre une tendance **croissante**. C'est donc le seul qui a un coefficient de corrélation **positif**. Par conséquent, il est assuré d'avoir le plus grand coefficient de corrélation, puisque les 2 autres sont négatifs.

Astuce : Comme il faut les classer en *ordre décroissant*, il est certain que la bonne réponse doit commencer par **C**. **Par élimination**, on peut retrancher les choix a), b) et d).

Allons plus en détail. Commençons par donner une estimation des coefficients de corrélation des 3 nuages de points.

- Le graphique **A** montre une corrélation **décroissante faible**. Donc, $\mathbf{r_A \approx -0{,}6}$.
- Le graphique **B** montre une corrélation **décroissante parfaite**. Donc $\mathbf{r_B = -1}$.
- Le graphique **C** montre une corrélation **croissante moyenne**. Donc, $\mathbf{r_C \approx +0{,}8}$.

Ainsi, en ordre décroissant, on obtient bel et bien +0,8 > −0,6 > −1, soit le choix **c) C > A > B**. Le choix **d) B < A < C** n'est donc pas la bonne réponse, car c'est placé en ordre croissant et non décroissant.

Si on avait demandé de classer les nuages de points en ordre de **force** de corrélation, il aurait fallu ignorer les signes + et –.

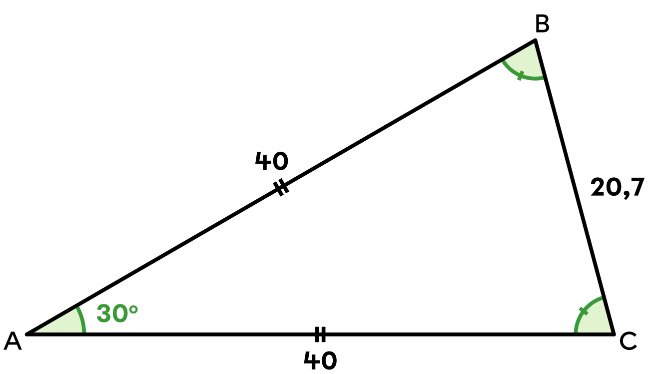
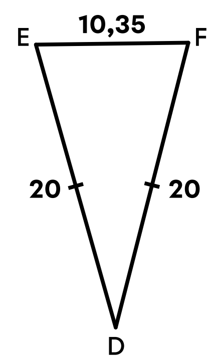
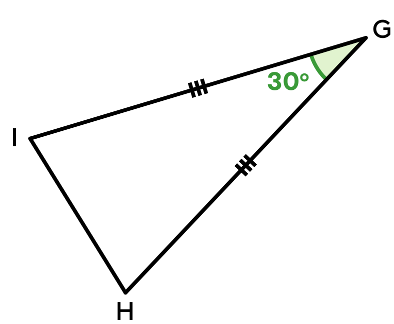
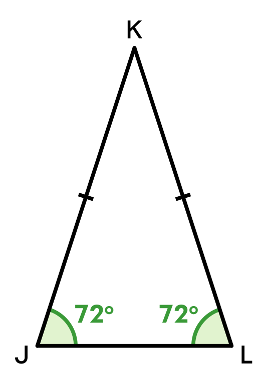
- Le nuage de points qui montre la corrélation la moins forte est le graphique A.
- La corrélation linéaire du nuage de points C est plus forte que la A.
- La corrélation du nuage de points B est encore plus forte, puisqu'elle est parfaite.

Ainsi, de la plus faible à la plus forte corrélation (sans tenir compte des signes), l'ordre est le choix **b) A < C < B**. Et, de la plus forte à la plus faible corrélation, c'est l'ordre inverse, soit le choix **a) B > C > A**.

À retenir : À l'examen, il faut porter attention à l'ordre demandé (croissant ou décroissant) et à ce qu'il faut ordonner, soit les **coefficients** de corrélation (tenir compte des signes) ou les **forces** de corrélation (ignorer les signes).

Question 2

Trouve l'intrus.
Les triangles suivants sont semblables, sauf un. Lequel?

A	B
	
C	**D**
	

Réponse : d) le triangle JKL

- Le triangle ABC est semblable au triangle DEF par **CCC** : des triangles sont semblables si leurs côtés homologues sont proportionnels.

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\mathrm{m}\overline{AB}}{\mathrm{m}\overline{DE}} & = & \dfrac{\mathrm{m}\overline{AC}}{\mathrm{m}\overline{DF}} & = & \dfrac{\mathrm{m}\overline{BC}}{\mathrm{m}\overline{EF}} \\ \dfrac{40}{20} & = & \dfrac{40}{20} & = & \dfrac{20{,}7}{10{,}35} \\ 2 & = & 2 & = & 2 \end{array}$$

- Le triangle ABC est semblable au triangle GHI par **CAC** : des triangles sont semblables s'ils ont 1 paire d'angles isométriques compris entre 2 paires de côtés proportionnels.

  - $\mathrm{m}\angle BAC = \mathrm{m}\angle HGI = 30^\circ$
  - $$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathrm{m}\overline{AB}}{\mathrm{m}\overline{GH}} & = & \dfrac{\mathrm{m}\overline{AC}}{\mathrm{m}\overline{GI}} \\ \dfrac{40}{\mathrm{m}\overline{GH}} & = & \dfrac{40}{\mathrm{m}\overline{GI}} \end{array}$$

  Cette égalité est vraie, car les segments GH et GI sont isométriques.

  Remarque : Dans ces 2 triangles, les angles isométriques sont bel et bien situés entre les côtés proportionnels.

Comme le triangle ABC est semblable au triangle DEF **et** au triangle GHI, on peut affirmer, par transitivité, que les triangles DEF et GHI sont semblables entre eux. Autrement dit, nous avons déjà repéré les 3 triangles semblables. Par élimination, l'autre triangle, soit le triangle KJL est l'intrus recherché. Maintenant, voici pourquoi.

- Les triangles ABC et KJL paraissent semblables par AA (des triangles sont semblables s'ils ont 2 paires d'angles isométriques), mais ne le sont pas. Les angles B et C sont isométriques entre eux. Il en est de même pour les angles J et L, mais ça ne veut pas dire que l'angle C est isométrique à l'angle J. Vérifions-le.
  Dans le triangle ABC, l'angle A mesure 30°. Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180°, on peut calculer la mesure des angles B et C.

$$\mathrm{m}\angle B = \mathrm{m}\angle C = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

  Or, dans le triangle KJL, les angles J et L mesurent 72° et non 75°.

Remarque : Les conditions d'isométrie des triangles sont pratiquement identiques aux conditions de similitude.

- Pour CCC et pour CAC, les côtés doivent être *isométriques* au lieu d'être *proportionnels*.
- Au lieu de **AA**, il faut plutôt utiliser **ACA** : des triangles sont isométriques s'ils ont 1 paire de côtés isométriques compris entre 2 paires d'angles homologues isométriques.

Section B

Question 3

Soit une parabole passant par le point (8, 48). Quelle est l'abscisse, en notation fractionnaire, du ou des points de la parabole dont l'ordonnée vaut $\frac{4}{27}$?

Réponse : Le ou les points dont l'ordonnée vaut $\frac{4}{27}$ ont comme abscisse **- 4 / 9 et 4 / 9**.

Explications

1. Trouver la règle de la parabole.

   On calcule le paramètre a à l'aide du point (8, 48).

$$f(x) = ax^2$$
$$48 = a(8)^2$$
$$48 = 64a$$
$$\frac{48}{64} = a$$
$$\frac{3}{4} = a$$

   On obtient alors la règle suivante.

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2$$

2. Calculer les abscisses lorsque l'ordonnée vaut $\frac{4}{27}$.

   On remplace *f(x)* par $\frac{4}{27}$, puis on isole *x*.

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2$$
$$\frac{4}{27} = \frac{3}{4}x^2$$
$$\frac{4}{27} \times \frac{4}{3} = x^2$$
$$\frac{16}{81} = x^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{16}{81}} = x$$
$$\pm\frac{4}{9} = x$$

On obtient alors les points $(\frac{-4}{9}, \frac{4}{27})$ et $(\frac{4}{9}, \frac{4}{27})$.

Question 4

L'aire d'un quadrilatère est représentée par l'expression algébrique suivante.

$$25x^2 - 35x + 12$$

Détermine de quel type de quadrilatère il s'agit, ainsi que les expressions algébriques qui correspondent à la mesure de ses côtés.

Réponse : Les côtés du **rectangle** sont représentés par les expressions **5x - 4** et **5x - 3**.

Explications

Afin de trouver les expressions qui correspondent aux côtés du quadrilatère, on doit factoriser le polynôme $25x^2-35x+12$. Plusieurs méthodes de factorisation sont possibles, alors allons-y avec le *produit-somme*.

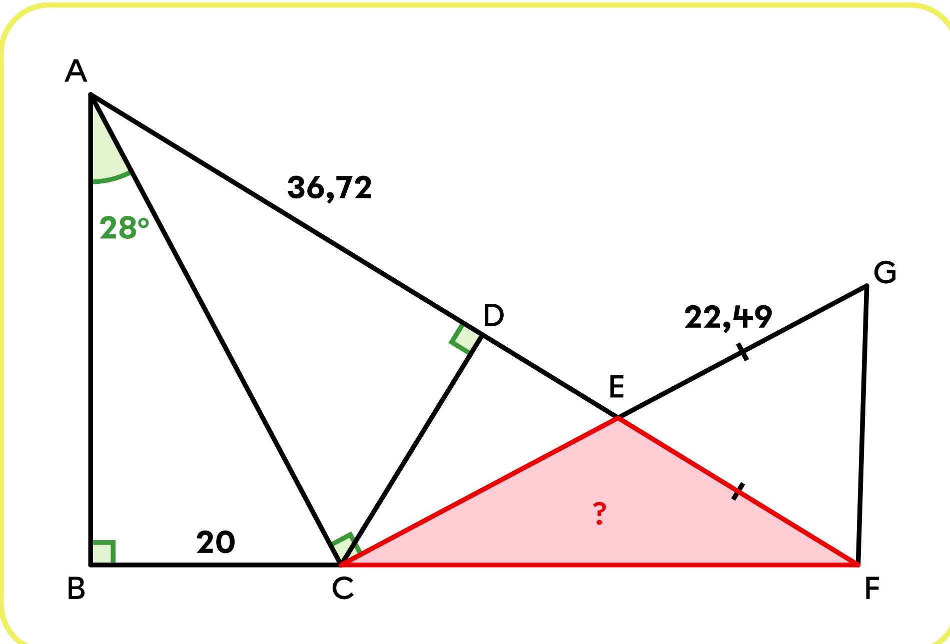
Produit-somme
$25x^2 - 35x + 12$ $\text{Produit} = 25 \times 12 = 300 \qquad \text{Somme} = -35$ On prend -20 et -15. $25x^2 - 20x - 15x + 12$ $5x(5x-4) - 3(5x-4)$ $(5x-4)(5x-3)$

Puisque les 2 binômes ainsi obtenus sont différents pour toutes valeurs x, on en conclut que le quadrilatère est un **rectangle** dont les côtés sont 5x - 4 et 5x - 3.

Section C

Question 5

Quelle est l'aire du triangle CEF?



Plusieurs démarches sont possibles. En voici une.

1. Calculer la mesure du segment $\overline{\text{AC}}$

$$\sin(A) = \frac{\text{m}BC}{\text{m}\overline{AC}}$$
$$\sin(28°) = \frac{20}{\text{m}\overline{AC}}$$
$$\text{m}\overline{AC} = \frac{20}{\sin(28°)}$$
$$\text{m}\overline{AC} \approx 42{,}6$$

2. Calculer la mesure du segment $\overline{\text{AE}}$

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), chaque cathète ($\overline{\text{AC}}$) est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse ($\overline{\text{AD}}$) et l'hypoténuse entière ($\overline{\text{AE}}$).

$$\frac{\text{m}\overline{AD}}{\text{m}\overline{AC}} = \frac{\text{m}\overline{AC}}{\text{m}\overline{AE}}$$
$$\text{m}\overline{AC}^2 = \text{m}\overline{AD} \times \text{m}\overline{AE}$$
$$42{,}6^2 = 36{,}72 \times \text{m}\overline{AE}$$
$$49{,}42 \approx \text{m}\overline{AE}$$

3. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{DE}}$.

   Les points A, D et E sont alignés. Ainsi, $\mathrm{m}\overline{\mathrm{AE}} = \mathrm{m}\overline{\mathrm{AD}} + \mathrm{m}\overline{\mathrm{DE}}$.

$$\mathrm{m}\overline{AE} = \mathrm{m}\overline{AD} + \mathrm{m}\overline{DE}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\overline{DE} &= \mathrm{m}\overline{AE} - \mathrm{m}\overline{AD} \\ &= 49{,}42 - 36{,}72 \\ &= 12{,}7 \end{aligned}$$

4. Calculer la mesure du segment CD.

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), la hauteur issue de l'angle droit ($\overline{\mathrm{CD}}$) est moyenne proportionnelle entre les 2 segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse ($\overline{\mathrm{AD}}$ et $\overline{\mathrm{DE}}$).

$$\frac{\mathrm{m}\overline{AD}}{\mathrm{m}\overline{CD}} = \frac{\mathrm{m}\overline{CD}}{\mathrm{m}\overline{DE}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\overline{CD}^2 &= \mathrm{m}\overline{AD} \times \mathrm{m}\overline{DE} \\ \mathrm{m}\overline{CD} &= \sqrt{36{,}72 \times 12{,}7} \\ \mathrm{m}\overline{CD} &\approx 21{,}59 \end{aligned}$$

5. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{CE}}$

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), le produit de l'hypoténuse ($\overline{\mathrm{AE}}$) et de la hauteur correspondante (CD) est égal au produit des cathètes ($\overline{\mathrm{AC}}$ et $\overline{\mathrm{CE}}$).

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\overline{AE} \times \mathrm{m}\overline{CD} &= \mathrm{m}\overline{AC} \times \mathrm{m}\overline{CE} \\ \left(\mathrm{m}\overline{AD} + \mathrm{m}\overline{DE}\right) \times \mathrm{m}\overline{CD} &= \mathrm{m}\overline{AC} \times \mathrm{m}\overline{CE} \\ (36{,}72 + 12{,}7) \times 21{,}59 &= 42{,}6 \times \mathrm{m}\overline{CE} \\ \mathrm{m}\overline{CE} &= \frac{49{,}42 \times 21{,}59}{42{,}6} \\ \mathrm{m}\overline{CE} &\approx 25{,}05 \end{aligned}$$

6. Calculer la mesure des angles DEC et CEF.

   Le triangle DEC étant rectangle en D, on peut utiliser un rapport trigonométrique.

$$\begin{aligned} \tan(\angle DEC) &= \frac{\mathrm{m}\overline{CD}}{\mathrm{m}\overline{DE}} \\ &= \frac{21{,}59}{12{,}7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\angle DEC &= \tan^{-1}\left(\frac{21{,}59}{12{,}7}\right) \\ &\approx 59{,}5° \end{aligned}$$

Des angles adjacents qui forment un angle plat sont supplémentaires.
Ainsi, on peut calculer la mesure de l'angle CEF.

$$\begin{aligned} \text{m}\angle CEF &= 180° - \text{m}\angle DEC \\ &= 180° - 59{,}5° \\ &= 120{,}5° \end{aligned}$$

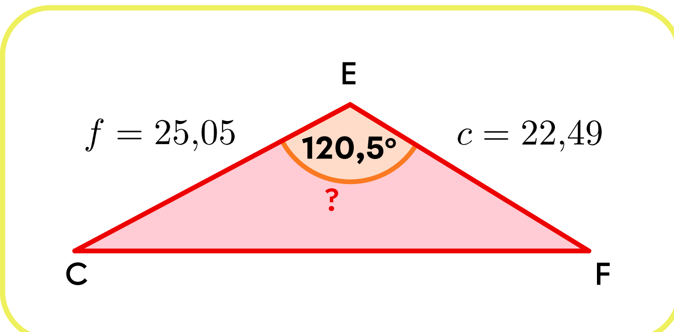
7. Déterminer la mesure du segment $\overline{\text{EF}}$.

   Les indications sur les segments $\overline{\text{EF}}$ et $\overline{\text{EG}}$ nous montrent qu'ils sont isométriques.
   Il s'agit d'une donnée du problème.

$$\text{m}\overline{EF} = \text{m}\overline{EG} = 22{,}49 \text{ unités}$$

8. Calculer l'aire du triangle CEF.

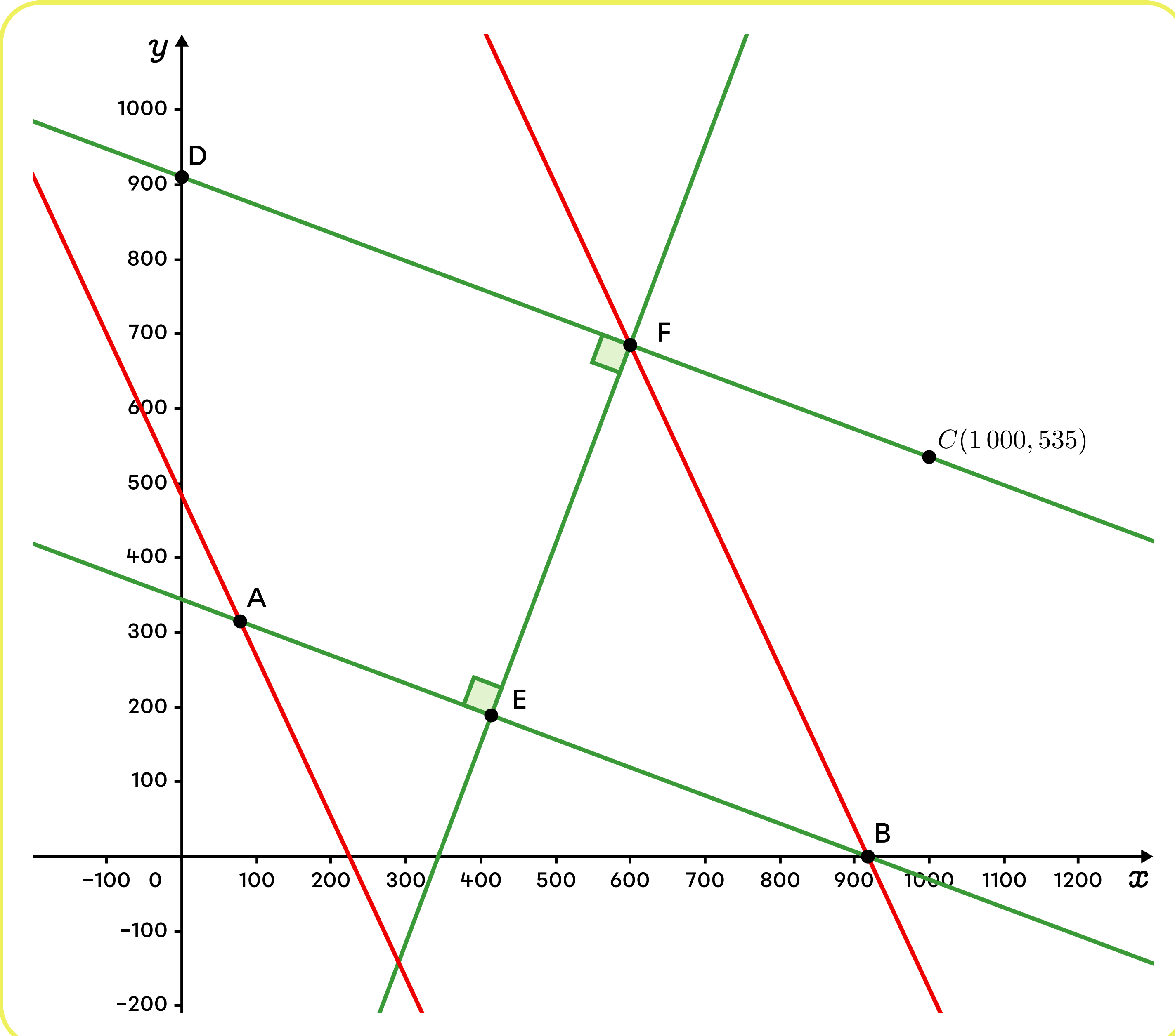
   On utilise la formule d'aire à l'aide du rapport trigonométrique sinus.



$$\begin{aligned} A_{\triangle CEF} &= \frac{c \times f \times \sin(E)}{2} \\ &= \frac{22{,}49 \times 25{,}05 \times \sin(120{,}5°)}{2} \\ &\approx 242{,}7 \text{ unités}^2 \end{aligned}$$

Réponse : Le triangle CEF a une aire d'environ **242,7** unités carrées.

Question 6



Deux trajets permettent d'aller du point B au point D : le trajet BFD et le trajet BEFD. Afin de déterminer le trajet le plus rapide, il faut calculer la longueur, puis la durée de chaque trajet en tenant compte des limites de vitesse. Pour y arriver, il faut d'abord déterminer les coordonnées de chaque point du graphique.

1. Déterminer les coordonnées des points.

   a) Trouver les coordonnées du point A.

   Dans la règle de la droite AB, on remplace x par 78 et on isole y.

$$\begin{aligned} 3x + 8y &= 2\ 754 \\ 3(78) + 8y &= 2\ 754 \\ 234 + 8y &= 2\ 754 \\ 8y &= 2\ 520 \\ y &= 315 \end{aligned}$$

   Ainsi, les coordonnées du point A sont (78, 315).

   b) Trouver les coordonnées du point B.

   Puisque B est situé sur l'axe des x, son ordonnée vaut 0.

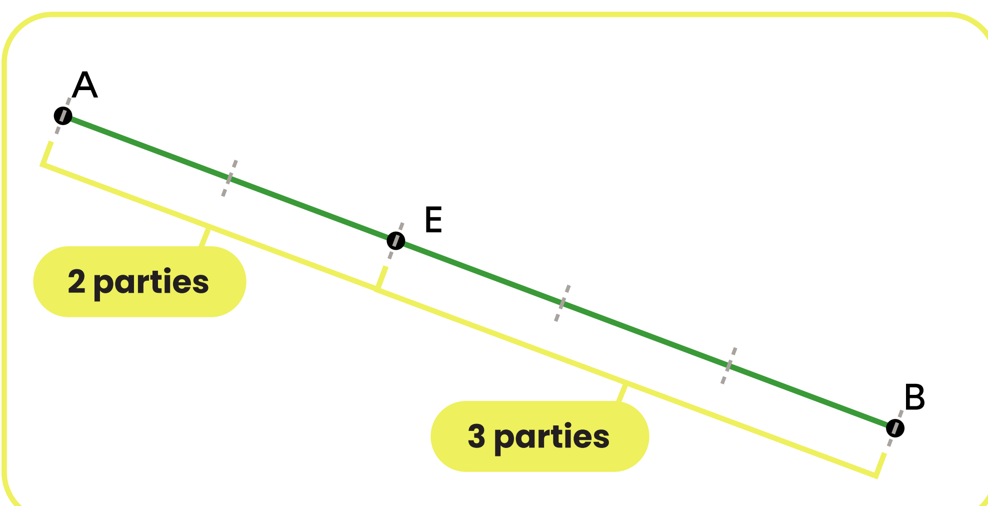
$$\begin{aligned} 3x + 8y &= 2\ 754 \\ 3x + 8(0) &= 2\ 754 \\ 3x &= 2\ 754 \\ x &= 918 \end{aligned}$$

   Ainsi, les coordonnées du point B sont (918, 0).

   c) Trouver les coordonnées du point E.

   On utilise la formule du point de partage.

   D'abord, il faut déterminer dans quel rapport partie-tout le point E partage le segment $\overline{BA}$. Le rapport donné (3:2) est un rapport partie-partie.
   S'il y a 3 « parties » du point B au point E et 2 autres « parties » du point E au point A, c'est qu'il y a 5 « parties » en tout.



Donc, puisque le point de départ est B, on doit utiliser la fraction $\frac{3}{5}$.
(Si on choisit de prendre le point A comme départ, alors il faut utiliser la fraction $\frac{2}{5}$).

$$\begin{aligned}(x_E, y_E) &= \left(x_B + \frac{3}{5}(x_A - x_B), y_B + \frac{3}{5}(y_A - y_B)\right)\\ &= \left(918 + \frac{3}{5}(78 - 918), 0 + \frac{3}{5}(315 - 0)\right)\\ &= (414, 189)\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du point E sont (414, 189).

d) Déterminer la pente de la droite AB.

Il suffit de transformer la règle de la droite AB sous la forme canonique.

$$\begin{aligned}3x + 8y &= 2\ 754\\ 8y &= -3x + 2\ 754\\ y &= -\frac{3}{8}x + 344{,}25\end{aligned}$$

Ainsi, la pente de la droite AB vaut - $\frac{3}{8}$.

e) Calculer la règle de la droite EF.

Comme les droites EF et AB sont perpendiculaires, le produit de leurs pentes vaut -1.

$$\begin{aligned}a_{AB} \times a_{EF} &= -1\\ a_{EF} &= \frac{-1}{a_{AB}}\\ a_{EF} &= \frac{-1}{-\frac{3}{8}}\\ a_{EF} &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Remarque : Une autre explication possible est la suivante. Les droite EF et AB étant perpendiculaires, elles ont des pentes qui sont de signes contraires et qui sont des fractions inverses. - $\frac{3}{8}$ → + $\frac{8}{3}$

En utilisant la pente de EF et les coordonnées du point E, on trouve la règle de la droite EF.

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= \frac{8}{3}x + b \\ 189 &= \frac{8}{3}(414) + b \\ 189 &= 1\ 104 + b \\ -915 &= b \end{aligned}$$

Ainsi, la règle de la droite EF est : $y = \frac{8}{3}x - 915$.

f) Déterminer la règle de la droite CD et les coordonnées du point D

Comme les droites AB et CD sont toutes les 2 perpendiculaires à la droite EF, elles sont parallèles entre elles. Par conséquent, AB et CD ont la même pente.

$$a_{AB} = a_{CD} = -\frac{3}{8}$$

En utilisant la pente de CD et les coordonnées du point C, on trouve la règle de la droite CD.

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= -\frac{3}{8}x + b \\ 535 &= -\frac{3}{8}(1\,000) + b \\ 535 &= -375 + b \\ 910 &= b \end{aligned}$$

Ainsi, la règle de la droite CD est : $y = -\frac{3}{8}x + 910$.

→ L'ordonnée à l'origine de la droite CD, correspond à l'ordonnée du point D étant donné que D est situé sur l'axe des y. Ainsi, les coordonnées de D sont (0, 910).

g) Trouver les coordonnées du point F.

Le point F est situé à l'intersection des droites CD et EF. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on utilise la méthode de comparaison.

$$\begin{aligned} y_{CD} &= y_{EF} \\ -\frac{3}{8}x + 910 &= \frac{8}{3}x - 915 \\ 910 + 915 &= \frac{8}{3}x + \frac{3}{8}x \\ 1\ 825 &= \frac{73}{24}x \\ 600 &= x \end{aligned}$$

On remplace x par 600 dans la règle de la droite CD pour trouver l'ordonnée du point F.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{8}\boldsymbol{x} + 910 \\ y &= -\frac{3}{8}\mathbf{(600)} + 910 \\ y &= 685 \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du point F sont : (600, 685).

Remarque : Il est également possible de remplacer x par 600 dans la règle de la droite EF.

2. Calculer les mesures des segments BE, BF, EF et DF.

On utilise la formule de distance entre 2 points.

$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
$\text{dist}(B, E) = \sqrt{(414 - 918)^2 + (189 - 0)^2}$ $\text{m}\overline{BE} \approx 538{,}27 \text{ m}$	$\text{dist}(E, F) = \sqrt{(600 - 414)^2 + (685 - 189)^2}$ $\text{m}\overline{EF} \approx 529{,}73 \text{ m}$
$\text{dist}(B, F) = \sqrt{(600 - 918)^2 + (685 - 0)^2}$ $\text{m}\overline{BF} \approx 755{,}21 \text{ m}$	$\text{dist}(D, F) = \sqrt{(600 - 0)^2 + (685 - 910)^2}$ $\text{m}\overline{DF} \approx 640{,}80 \text{ m}$

3. Déterminer les coordonnées des points

Pour calculer la durée de chaque trajet, il faut utiliser la formule de la vitesse qui est fournie.

$$\text{Vitesse} = \frac{\text{Distance}}{\text{Temps}} \iff \text{Temps} = \frac{\text{Distance}}{\text{Vitesse}}$$

Les trajets possibles sont B → F → D et B → E → F → D.

a) Pour le trajet B → F → D, il faut considérer que le segment BF est limité à 30 km/h et que le segment FD est limité à 50 km/h. Toutes les distances calculées précédemment sont en mètres (m), donc il faut les convertir en kilomètres (km).

$$\begin{aligned}\text{Temps} &= \frac{\text{distance}(B,F)}{\text{vitesse}(B,F)} + \frac{\text{distance}(F,D)}{\text{vitesse}(F,D)}\\ &= \frac{0{,}755\,21\ \text{km}}{30\ \text{km/h}} + \frac{0{,}640\,80\ \text{km}}{50\ \text{km/h}}\\ &\approx 0{,}038\ \text{h}\\ &\approx 136{,}76\ \text{s}\end{aligned}$$

b) Pour le trajet B → E → F → D, la vitesse est limitée à 50 km/h.

$$\begin{aligned}\text{Temps} &= \frac{\text{distance totale}}{\text{vitesse}}\\ &= \frac{(0{,}538\,27 + 0{,}529\,73 + 0{,}640\,80)\ \text{km}}{50\ \text{km/h}}\\ &= \frac{1{,}708\,80\ \text{km}}{50\ \text{km/h}}\\ &\approx 0{,}034\ \text{h}\\ &\approx 123{,}03\ \text{s}\end{aligned}$$

Conclusion : Même si le trajet B → E → F → D est plus long (en distance) que le trajet B → F → D, il faut environ 13,73 s de moins pour le parcourir.

Remarque : Comme discuté dans la grande révision, cette mise en situation aurait pu être une **démonstration** ou une **conjecture**. Dans tous les cas, il faut faire la même démarche. C'est juste la conclusion qui change. Pour plus d'informations sur les conjectures et les démonstrations, consulte les fiches suivantes.

Les démonstrations

Les conjectures

Question 7

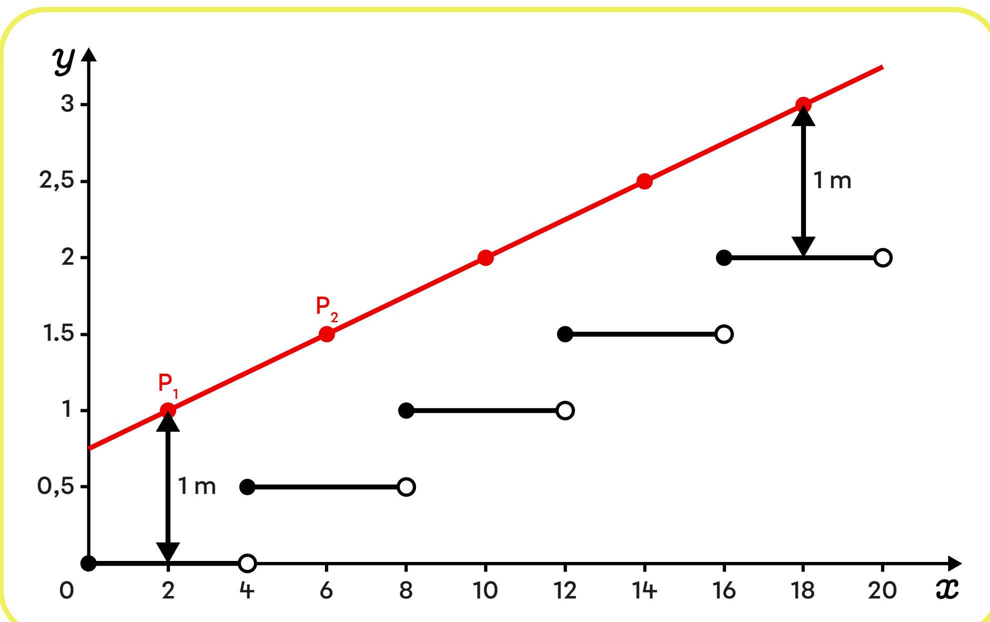
Indice : La consigne pourrait être reformulée de la façon suivante. À partir des paramètres a et b de la fonction f(x), comment peut-on trouver la règle de la fonction g(x)?

Lorsqu'on doit émettre une conjecture, il faut analyser au moins 3 cas. En général, on analyse le premier cas qui est fourni, puis on invente 2 autres cas.

Conseils et Astuces
Il faut faire des exemples variés. Choisis des nombres entiers, des nombres décimaux, des fractions, des nombres positifs, négatifs, etc. Si, par exemple, tu ne prends que des nombres entiers positifs, tu risques de ne pas trouver une conjecture suffisamment précise.

1er cas : Les paramètres a et b sont positifs.
2e cas : Les paramètres a et b sont négatifs.
3e cas : Le paramètre a est négatif et le paramètre b est positif.

1er cas : Paramètres a et b positifs



1. Déterminer la valeur des paramètres a et b de l'escalier.
   → La hauteur de chaque contremarche est de 0,5 m. Ainsi, |a| = 0,5.
   → La longueur de chaque marche est de 4 m. Ainsi, $|b| = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
   → L'escalier est croissant et chaque marche commence par un point plein. Ainsi, a et b sont positifs.

   En résumé, la règle est f(x) = 0,5[0,25x].

2. Déterminer la règle de la rampe (g(x)).

   a) Pour déterminer la règle de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
   → Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 4. Donc, les coordonnées de P_1 sont (2, 1).
   → Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2e marche, qui va de 4 à 8 à une hauteur de 0,5 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (6; 1,5).

   b) On calcule la pente (m).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1{,}5 - 1}{6 - 2} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

   On détermine l'ordonnée à l'origine (k).

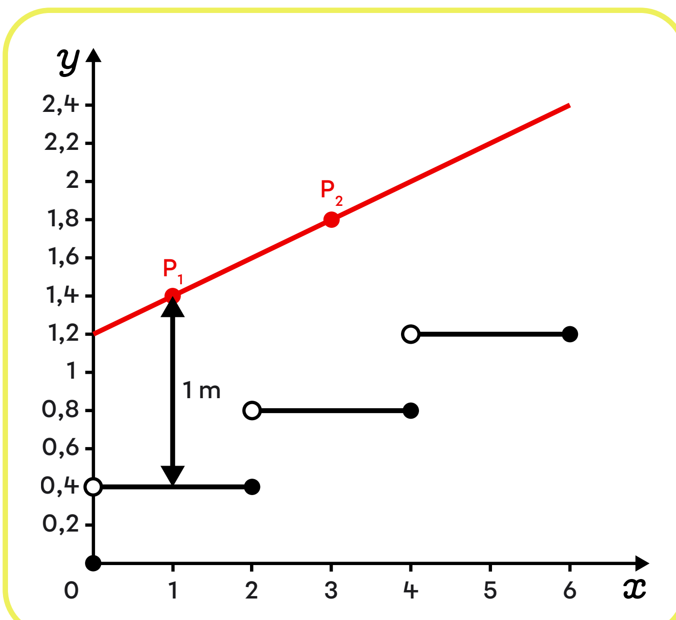
$$\begin{aligned} g(x) &= mx + k \\ g(x) &= \frac{1}{8}x + k \\ 1 &= \frac{1}{8}(2) + k \\ \frac{3}{4} &= k \end{aligned}$$

   Ainsi, la règle est $g(x) = \frac{1}{8}x + \frac{3}{4}$.

2e cas : Paramètres a et b négatifs

1. Choisir la règle de l'escalier (f(x)).

   Je choisis de faire un escalier **croissant** avec les paramètres **a et b négatifs**. Je vais donc prendre les valeurs suivantes.
   → En choisissant a = -0,4, chaque contremarche sera de 0,4 m.
   → En choisissant b = -0,5, chaque marche aura une longueur de $\frac{1}{0{,}5}$ = 2 m.
   → Comme les paramètres a et b choisis sont négatifs, l'escalier sera croissant et chaque marche commencera par un point vide.
   → Ainsi, la règle choisie est $f(x) = -0{,}4[-0{,}5x]$ et son graphique est le suivant.



2. Déterminer la règle de la rampe (g(x)).

a) Pour déterminer la règle de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
→ Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 2 à une hauteur de 0,4 m. Donc, les coordonnées de P_1 sont (1; 1,4).
→ Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2e marche, qui va de 2 à 4 à une hauteur de 0,8 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (3; 1,8).

b) On calcule la pente (m).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1{,}8 - 1{,}4}{3 - 1} \\ &= 0{,}2 \end{aligned}$$

c) On détermine l'ordonnée à l'origine (k).

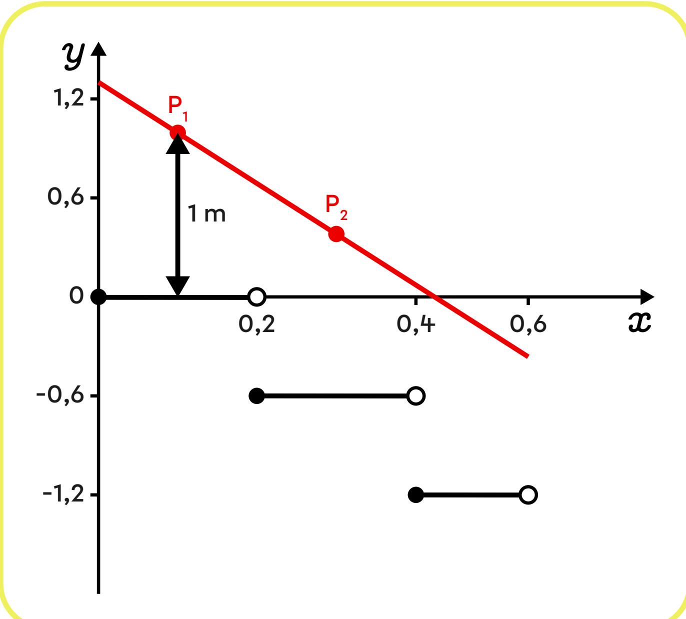
$$\begin{aligned} g(x) &= mx + k \\ g(x) &= 0{,}2x + k \\ 1{,}4 &= 0{,}2(1) + k \\ 1{,}2 &= k \end{aligned}$$

Ainsi, la règle est $g(x) = 0{,}2x + 1{,}2$.

3e cas : Paramètre a négatif et b positif

1. Choisir la règle de l'escalier (f(x)).

Je choisis de faire un escalier **décroissant** avec le paramètre a négatif.
Je vais prendre les valeurs suivantes.
→ En choisissant a = -0,6, chaque contremarche sera de 0,6 m.
→ En choisissant b = 5, chaque marche aura une longueur de $\frac{1}{5}$ = 0,2 m.
→ Comme a est négatif et b est positif, l'escalier sera décroissant et chaque marche commencera par un point plein.
Ainsi, la règle choisie est f(x)=-0,6[5x] et son graphique est le suivant.



2. Déterminer la règle de la rampe (g(x)).

   a) Pour déterminer la règle de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
   → Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 0,2 à une hauteur de 0 m. Donc, les coordonnées de P_1 sont (0,1; 1).
   → Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2e marche, qui va de 0,2 à 0,4 à une hauteur de -0,6 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (0,3; 0,4).

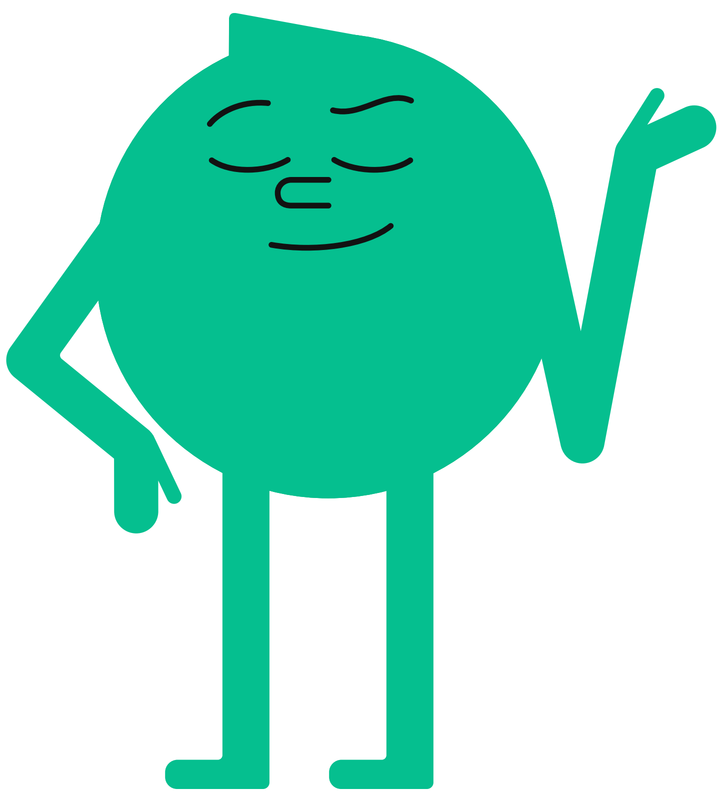
   b) On calcule la pente (m).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0{,}4 - 1}{0{,}3 - 0{,}1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

   c) On détermine l'ordonnée à l'origine (k).

$$\begin{aligned} g(x) &= mx + k \\ g(x) &= -3x + k \\ 1 &= -3(0{,}1) + k \\ 1{,}3 &= k \end{aligned}$$

   Ainsi, la règle est $g(x) = -3x + 1{,}3$.



Recherche des liens

Conseils et astuces
Il est souvent préférable de travailler avec des fractions pour mieux voir les liens. Par exemple, il est plus facile de voir que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ que de voir que $0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}125$.

1^er^ cas	$a = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$ $b = 0{,}25 = \dfrac{1}{4}$	$m = \dfrac{1}{8}$ $k = \dfrac{3}{4}$
2^e^ cas	$a = -0{,}4 = -\dfrac{2}{5}$ $b = -0{,}5 = -\dfrac{1}{2}$	$m = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$ $k = 1{,}2 = \dfrac{6}{5}$
3^e^ cas	$a = -0{,}6 = -\dfrac{3}{5}$ $b = 5$	$m = -3$ $k = 1{,}3 = \dfrac{13}{10}$

Trouver les liens, ça signifie qu'on doit se poser les questions suivantes.

- **Pour *m***
  - Comment obtenir $\frac{1}{8}$ à l'aide de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$?
  - Comment obtenir $\frac{1}{5}$ à l'aide de $-\frac{2}{5}$ et $-\frac{1}{2}$?
  - Comment obtenir -3 à l'aide de $-\frac{3}{5}$ et 5?
- **Pour *k***
  - Comment obtenir $\frac{3}{4}$ à l'aide de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ (sans oublier le 1 m)?
  - Comment obtenir 1,2 à l'aide de -0,4 et -0,5 (sans oublier le 1 m)?
  - Comment obtenir 1,3 à l'aide de -0,6 et 5 (sans oublier le 1 m)?

Conseils et Astuces

- Essaie d'abord les opérations de base (addition, soustraction, multiplication et division).

Exemples

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✓ $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗

Il faut vérifier si **le lien trouvé** fonctionne aussi dans les 2 autres cas.

- Essaie d'utiliser un seul des paramètre à la fois.

Exemples

	Avec le paramètre **b**	Avec le paramètre **a**
1^er^ cas	$1 - b = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = k$ ✓	$1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = k$ ✓
2^e^ cas	$1 - b = 1 - (-0{,}5) = 1{,}5 \neq k$ ✗	$1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2} \times -0{,}4 = 1{,}2 = k$ ✓

- Analyse le graphique et fais appel à tes connaissances mathématiques.

Exemples
- L'ordonnée à l'origine d'une fonction affine (**k**) est associée à l'échelle *verticale*, tout comme le paramètre **a** d'une fonction partie entière.
- Pour déterminer le paramètre **k**, il faut aussi tenir compte de la hauteur de la rampe par rapport au milieu de la marche (**1 m**).

Voici les liens appropriés.

- **Pour *m***
  Dans tous les cas, si je multiplie les paramètres a et b ensemble, j'obtiens le paramètre m.
  - 1er cas : $ab = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = m$
  - 2^{e} cas : $ab = -0{,}4 \times -0{,}5 = 0{,}2 = m$
  - 3^{e} cas : $ab = -\frac{3}{5} \times 5 = -3 = m$

  Je me suis assuré que ça fonctionnait aussi bien dans tous les cas, soit avec a et b positifs, négatifs ou de signes contraires.

- **Pour *k***
  Dans les 3 cas, si j'enlève la moitié de la valeur du paramètre a à la hauteur de 1 m, j'obtiens k.
  - 1er cas : $1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = k$
  - 2^{e} cas : $1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2}(-0{,}4) = 1 - (-0{,}2) = 1{,}2 = k$
  - 3^{e} cas : $1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2}(-0{,}6) = 1 - (-0{,}3) = 1{,}3 = k$

On est prêt à formuler la réponse complète.

Conseils et astuces

- Il faut donner la réponse, c'est-à-dire sa conjecture, à l'aide de phrases complètes. Autrement dit, « $m = a \times b$ » et « $k = 1 - \frac{1}{2}a$ » n'est pas la réponse attendue, même s'il est permis de l'ajouter à sa conjecture.
- Il est préférable de donner un lien qui ne fonctionne pas dans tous les cas que de n'en donner aucun.

Réponse

- La pente m de la fonction g(x) est égale au produit des paramètres a et b de la fonction f(x), et ce, peu importe le signe de a et de b.

  Sous forme algébrique : $m = a \times b$

- L'ordonnée à l'origine k de la fonction g(x) s'obtient en soustrayant la moitié de la valeur de a à 1 m.

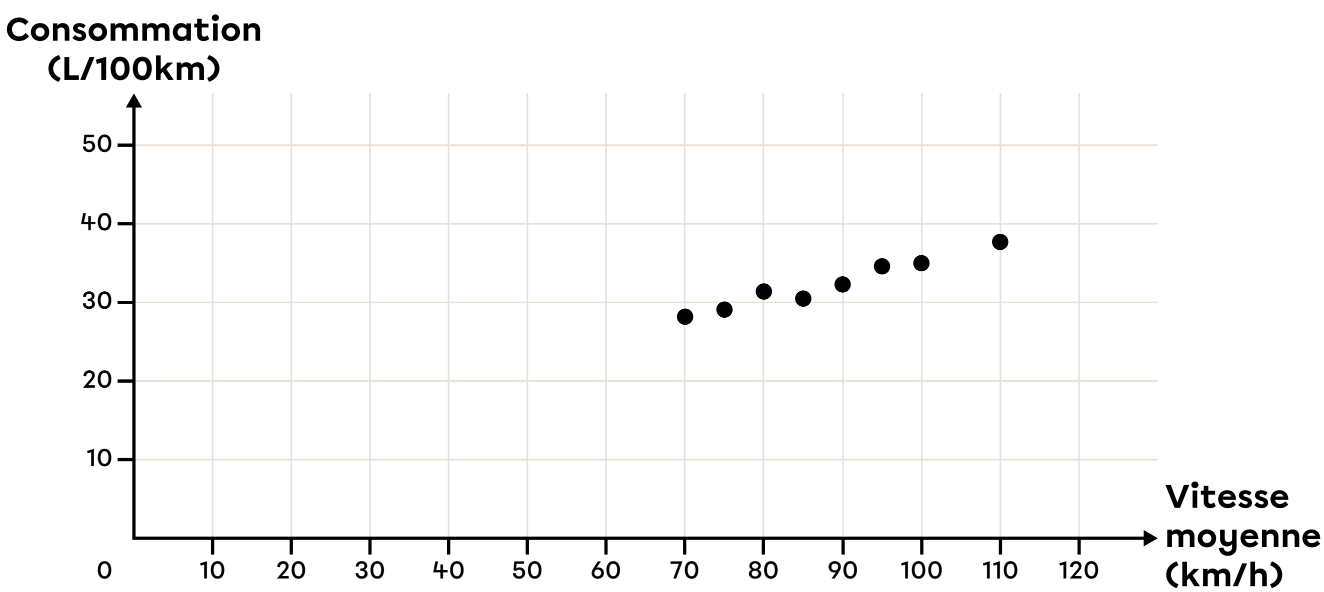
  Sous forme algébrique : $k = 1 - \frac{1}{2}a$

Question 8

Voici les principales étapes de la résolution du problème : on doit déterminer l'équation de la droite de régression pour les données de la flotte MétaCargo et s'en servir pour calculer la consommation de carburant à 105 km/h. Ensuite, on doit trouver la règle de la consommation de carburant pour la flotte NovaFret et calculer la consommation de carburant à 105 km/h avec cette règle.

A. Commençons par la flotte **MétaCargo**.

On trace le nuage de points pour voir s'il y a une corrélation entre les variables ou non.



On observe bel et bien une corrélation positive entre les variables. Plus la vitesse moyenne d'un camion est élevée et plus sa consommation d'essence augmente.

On va donc trouver la règle de la droite de régression. On peut utiliser la méthode de Mayer ou la méthode médiane-médiane. Prenons celle de **Mayer**.

1. Ordonner les coordonnées selon la variable indépendante. C'est déjà le cas.

x : Vitesse moyenne (km/h)	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**95**	**100**	**110**
y : Consommation (L/100 km)	28,2	29,1	31,4	30,5	32,3	34,6	35,0	37,7

2. Séparer la distribution en 2 groupes égaux, si possible.

	1er groupe				2e groupe			
x : Vitesse moyenne (km/h)	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**95**	**100**	**110**
y : Consommation (L/100 km)	28,2	29,1	31,4	30,5	32,3	34,6	35,0	37,7

3. Calculer les **points moyens** de chaque groupe (P_1 et P_2).

	1er groupe	2e groupe
Moyenne des abscisses	$\overline{x}_1 = \dfrac{70 + 75 + 80 + 85}{4} = 77{,}5$	$\overline{x}_2 = \dfrac{90 + 95 + 100 + 110}{4} = 98{,}75$
Moyenne des ordonnées	$\overline{y}_1 = \dfrac{28{,}2 + 29{,}1 + 31{,}4 + 30{,}5}{4} = 29{,}8$	$\overline{y}_2 = \dfrac{32{,}3 + 34{,}6 + 35{,}0 + 37{,}7}{4} = 34{,}9$
Point moyen	P_1 (77,5; 29,8)	P_2 (98,75; 34,9)

4. Trouver la règle de la droite de régression (y = ax + b) passant par les points P_1 et P_2.

a) Calculer la pente (a).

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{34{,}9 - 29{,}8}{98{,}75 - 77{,}5} \\ &= \frac{5{,}1}{21{,}25} \\ &= 0{,}24 \end{aligned}$$

Ainsi, $y = 0{,}24x + b$.

b) Calculer la valeur de b à l'aide du point P_1 (77,5; 29,8).

$$\begin{aligned} y &= 0{,}24x + b \\ 29{,}8 &= 0{,}24(77{,}5) + b \\ 11{,}2 &= b \end{aligned}$$

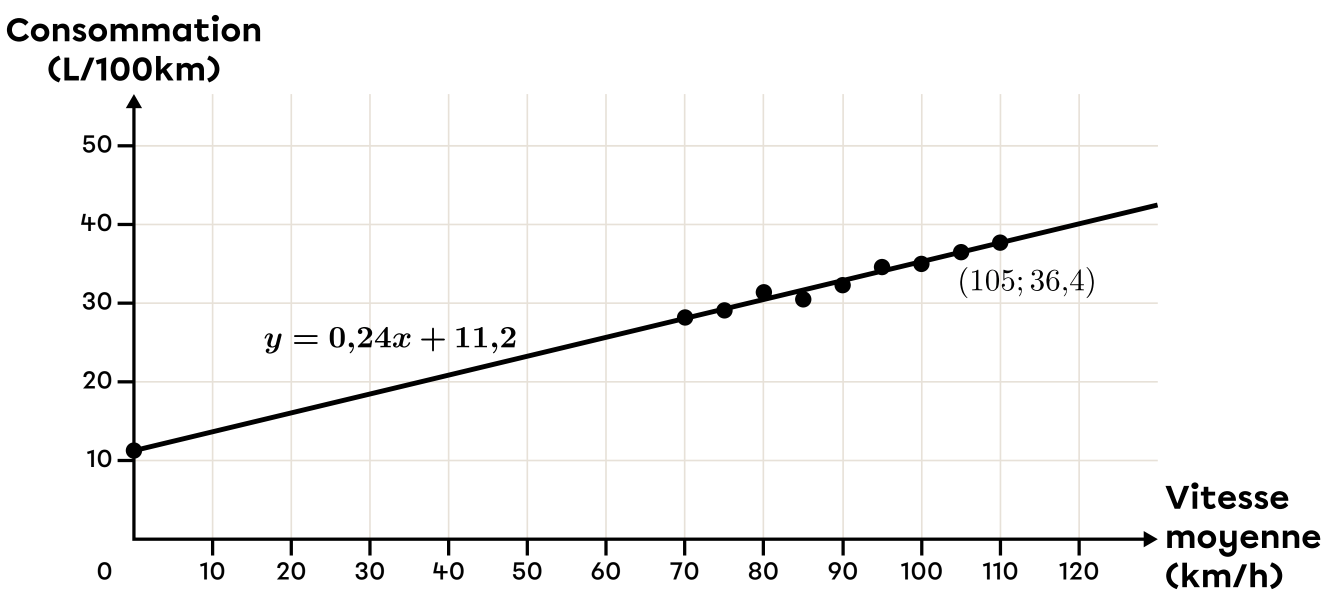
Ainsi, la règle de la droite de régression pour MétaCargo est : $y_1 = 0{,}24x + 11{,}2$.

Remarque : Si tu as utilisé la méthode médiane-médiane, tu devrais obtenir $y_1 = 0{,}236x + 11{,}18\overline{3}$.

5. Prédire la consommation de carburant à 105 km/h à l'aide de la règle de la droite.

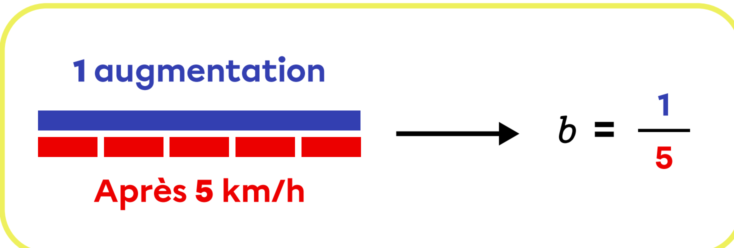
   Pour savoir quelle serait la consommation d'un camion roulant à une vitesse moyenne de 105 km/h, il faut remplacer x par 105 dans la règle de la droite de régression.

$$\begin{aligned} y_1 &= 0{,}24x + 11{,}2 \\ &= 0{,}24(105) + 11{,}2 \\ &= 36{,}4 \text{ L}/100 \text{ km} \end{aligned}$$



B. NovaFret.

1. Trouver la règle de la fonction qui permet de calculer la consommation de carburant des camions **NovaFret**.
   - On a le modèle : $y = a(c)^{bx}$.
   - On a l'ordonnée à l'origine, ce qui donne le point $(0, 12)$.
     L'ordonnée à l'origine correspond au paramètre a. Donc, $a = 12$.
   - On sait que l'augmentation est de 6 % tous les 5 km/h.
     Une augmentation de 6 % signifie que la base c vaut 1,06, car 100 % + 6 % = 106 % = 1,06.
     « Aux 5 km/h » signifie que le paramètre b vaut $\frac{1}{5}$.



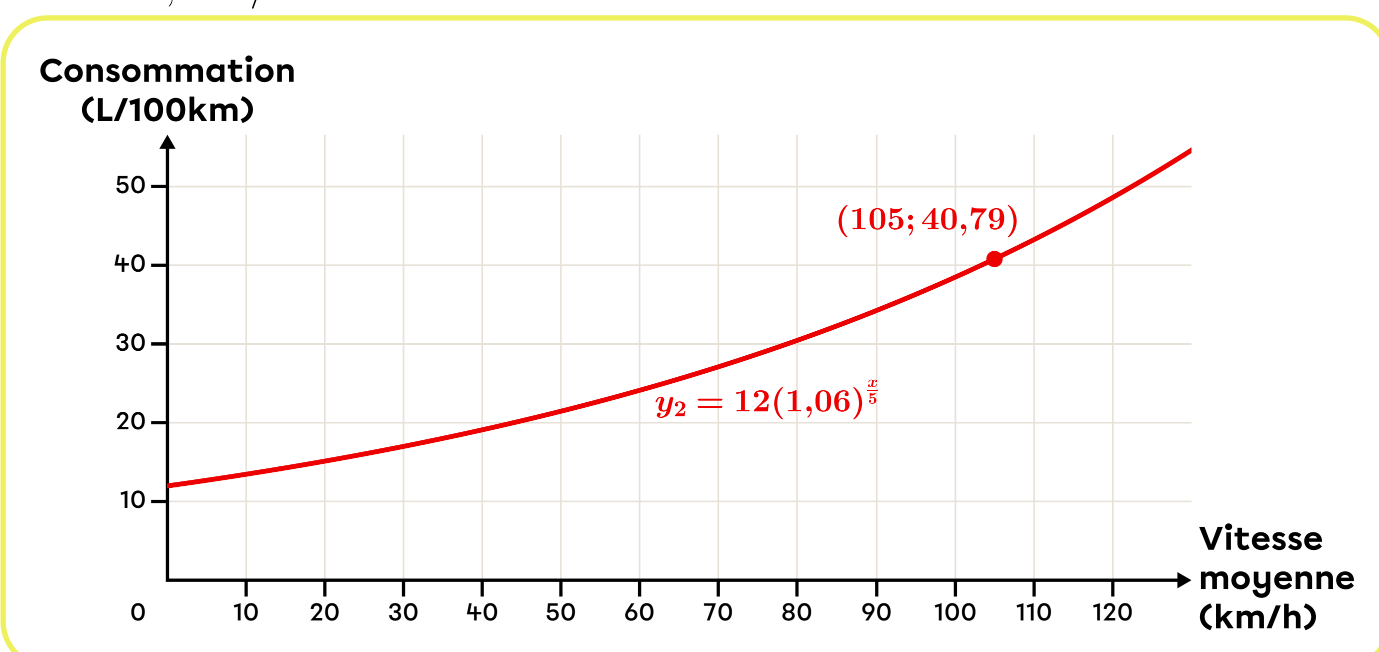
Donc, la règle de la fonction qui donne la consommation de carburant $(C(x))$ en fonction de la vitesse moyenne (x) est la suivante.

$$y_2 = 12(1{,}06)^{\frac{x}{5}}$$

2. Calculer la consommation de carburant à 105 km/h.

On remplace x par 105 dans la règle.

$$\begin{aligned} y_2 &= 12(1{,}06)^{\frac{x}{5}} \\ &= 12(1{,}06)^{\frac{105}{5}} \\ &\approx 40{,}79 \text{ L}/100 \text{ km} \end{aligned}$$



Réponse : Comme la vitesse moyenne sur le trajet est de 105 km/h, il faudrait prendre les camions de la flotte **MétaCargo**.

Justification : Selon la droite de régression, la consommation de carburant des camions de la flotte MétaCargo à 105 km/h est d'environ 36,4 L/100 km, ce qui est inférieur à celle des camions de la flotte NovaFret qui est d'environ 40,79 L/100 km.