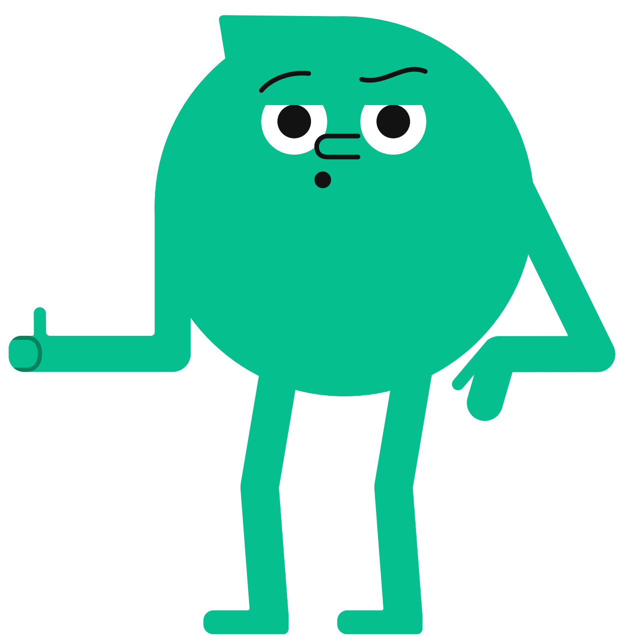
Simulation d'examen du ministère

alloprof
Plus d'astuces sur alloprof.ca

Mathématiques SN
Secondaire 4

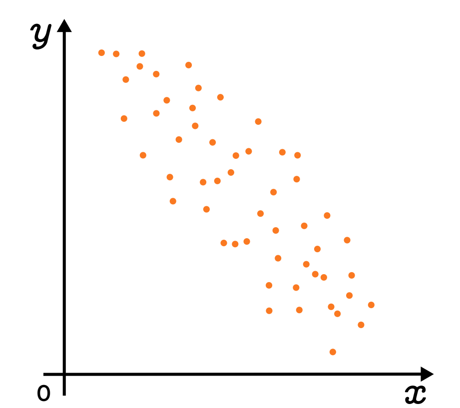
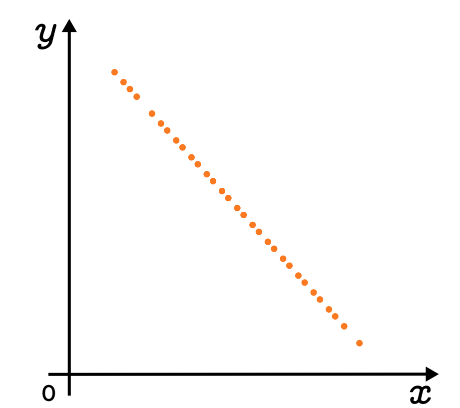
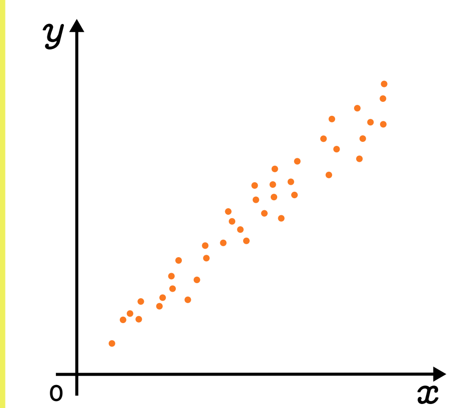


Corrigé

Section A

Question 1

Place les nuages de points suivants en ordre **décroissant** de **coefficient** de corrélation linéaire.

A	B	C
		

a) B > C > A
b) A < C < B
c) C > A > B
d) B < A < C

Réponse : c) C > A > B

Explications

Le nuage de points **C** est le seul qui montre une tendance **croissante**. C'est donc le seul qui a un coefficient de corrélation **positif**. Par conséquent, il est assuré d'avoir le plus grand coefficient de corrélation, puisque les 2 autres sont négatifs.

Astuce : Comme il faut les classer en *ordre décroissant*, il est certain que la bonne réponse doit commencer par **C**. **Par élimination**, on peut retrancher les choix a), b) et d).

Allons plus en détail. Commençons par donner une estimation des coefficients de corrélation des 3 nuages de points.

- Le graphique **A** montre une corrélation **décroissante faible**. Donc, $\mathbf{r_A \approx -0{,}6}$.
- Le graphique **B** montre une corrélation **décroissante parfaite**. Donc $\mathbf{r_B = -1}$.
- Le graphique **C** montre une corrélation **croissante moyenne**. Donc, $\mathbf{r_C \approx +0{,}8}$.

Ainsi, en ordre décroissant, on obtient bel et bien +0,8 > −0,6 > −1, soit le choix **c) C > A > B**. Le choix **d) B < A < C** n'est donc pas la bonne réponse, car c'est placé en ordre croissant et non décroissant.

Si on avait demandé de classer les nuages de points en ordre de **force** de corrélation, il aurait fallu ignorer les signes + et –.

• Le nuage de points qui montre la corrélation la moins forte est le graphique A.
• La corrélation linéaire du nuage de points C est plus forte que la A.
• La corrélation du nuage de points B est encore plus forte, puisqu'elle est parfaite.

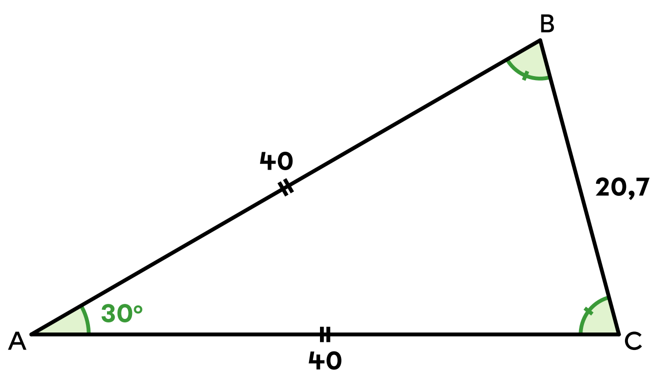
Ainsi, de la plus faible à la plus forte corrélation (sans tenir compte des signes), l'ordre est le choix **b) A < C < B**. Et, de la plus forte à la plus faible corrélation, c'est l'ordre inverse, soit le choix **a) B > C > A**.

À retenir : À l'examen, il faut porter attention à l'ordre demandé (croissant ou décroissant) et à ce qu'il faut ordonner, soit les **coefficients** de corrélation (tenir compte des signes) ou les **forces** de corrélation (ignorer les signes).

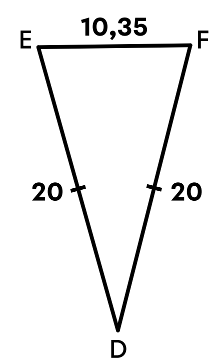
Question 2

Trouve l'intrus.
Les triangles suivants sont semblables, sauf un. Lequel?

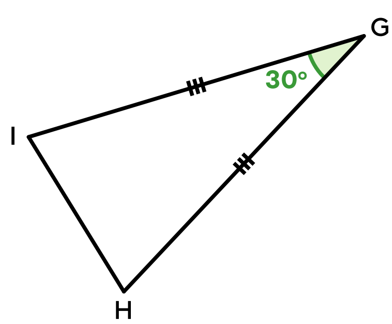
A



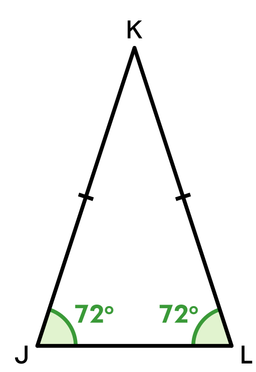
B



C



D



Réponse : d) le triangle JKL

- Le triangle ABC est semblable au triangle DEF par **CCC** : des triangles sont semblables si leurs côtés homologues sont proportionnels.

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\text{m}\overline{AB}}{\text{m}\overline{DE}} & = & \dfrac{\text{m}\overline{AC}}{\text{m}\overline{DF}} & = & \dfrac{\text{m}\overline{BC}}{\text{m}\overline{EF}} \\ \dfrac{40}{20} & = & \dfrac{40}{20} & = & \dfrac{20{,}7}{10{,}35} \\ 2 & = & 2 & = & 2 \end{array}$$

- Le triangle ABC est semblable au triangle GHI par **CAC** : des triangles sont semblables s'ils ont 1 paire d'angles isométriques compris entre 2 paires de côtés proportionnels.

  - $\text{m}\angle BAC = \text{m}\angle HGI = 30^\circ$
  - $$\begin{array}{ccc} \dfrac{\text{m}\overline{AB}}{\text{m}\overline{GH}} & = & \dfrac{\text{m}\overline{AC}}{\text{m}\overline{GI}} \\ \dfrac{40}{\text{m}\overline{GH}} & = & \dfrac{40}{\text{m}\overline{GI}} \end{array}$$

  Cette égalité est vraie, car les segments GH et GI sont isométriques.

  Remarque : Dans ces 2 triangles, les angles isométriques sont bel et bien situés entre les côtés proportionnels.

Comme le triangle ABC est semblable au triangle DEF **et** au triangle GHI, on peut affirmer, par transitivité, que les triangles DEF et GHI sont semblables entre eux. Autrement dit, nous avons déjà repéré les 3 triangles semblables. Par élimination, l'autre triangle, soit le triangle KJL est l'intrus recherché. Maintenant, voici pourquoi.

- Les triangles ABC et KJL paraissent semblables par AA (des triangles sont semblables s'ils ont 2 paires d'angles isométriques), mais ne le sont pas. Les angles B et C sont isométriques entre eux. Il en est de même pour les angles J et L, mais ça ne veut pas dire que l'angle C est isométrique à l'angle J. Vérifions-le.
  Dans le triangle ABC, l'angle A mesure 30°. Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180°, on peut calculer la mesure des angles B et C.

$$\text{m}\angle B = \text{m}\angle C = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

  Or, dans le triangle KJL, les angles J et L mesurent 72° et non 75°.

Remarques :

1. Les conditions d'isométrie des triangles sont pratiquement identiques aux conditions de similitude.
   - Pour CCC et pour CAC, les côtés doivent être *isométriques* au lieu d'être *proportionnels*.
   - Au lieu de **AA**, il faut plutôt utiliser **ACA** : des triangles sont isométriques s'ils ont 1 paire de côtés isométriques compris entre 2 paires d'angles homologues isométriques.

2. Avant d'utiliser les conditions minimales de similitude ou d'isométrie, il est parfois possible de trouver les mesures manquantes des triangles en utilisant la loi des cosinus et la loi des sinus. Toutefois, ce n'est généralement pas nécessaire.

Section B

Question 3

Trouve les coordonnées du sommet de la parabole qui passe par les points $(1{,}8)$, $(2{,}\text{-}2)$ et $(7{,}8)$.

Réponse : Les coordonnées du sommet sont **(4, -10)**.

Explications

1. Calculer le paramètre h

   Le 1er et le 3e point ont la même ordonnée, ce qui implique qu'on peut trouver le paramètre h en faisant la moyenne de leur abscisse.

$$\begin{aligned} h &= \frac{x_1 + x_3}{2} \\ &= \frac{7+1}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

   On obtient alors, pour l'instant, la règle suivante sous la forme canonique.

$$f(x) = a(x-4)^2 + k$$

2. Créer un système d'équations à l'aide de 2 points

   Il faut créer un système d'équations tout en évitant d'utiliser 2 points qui ont la même ordonnée. Prenons alors le 1er et le 2e point.

$$\begin{array}{ll} y_1 = a(x_1 - 4)^2 + k & y_2 = a(x_2 - 4)^2 + k \\ 8 = a(1-4)^2 + k & -2 = a(2-4)^2 + k \\ 8 = 9a + k & -2 = 4a + k \end{array}$$

3. Résoudre le système d'équations afin de trouver les paramètres *a* et *k*

   On peut utiliser la méthode de réduction afin d'éliminer le paramètre *k*.

$$\begin{array}{r} 8 = 9a + k \\ -(-2 = 4a + k) \\ \hline 10 = 5a + \mathbf{0} \\ 2 = a \end{array}$$

   Maintenant qu'on connait la valeur du paramètre a, on peut calculer celle de *k*.

$$\begin{aligned} 8 &= 9a + k \\ 8 &= 9(2) + k \\ 8 &= 18 + k \\ -10 &= k \end{aligned}$$

   On obtient alors la règle suivante.

$$f(x) = 2(x-4)^2 - 10$$

4. Donner les coordonnées du sommet

Réponse : Les coordonnées du sommet sont (4, -10).

Question 4

L'aire d'un quadrilatère est représentée par l'expression algébrique suivante.

$$25x^2 - 35x + 12$$

Détermine de quel type de quadrilatère il s'agit, ainsi que les expressions algébriques qui correspondent à la mesure de ses côtés.

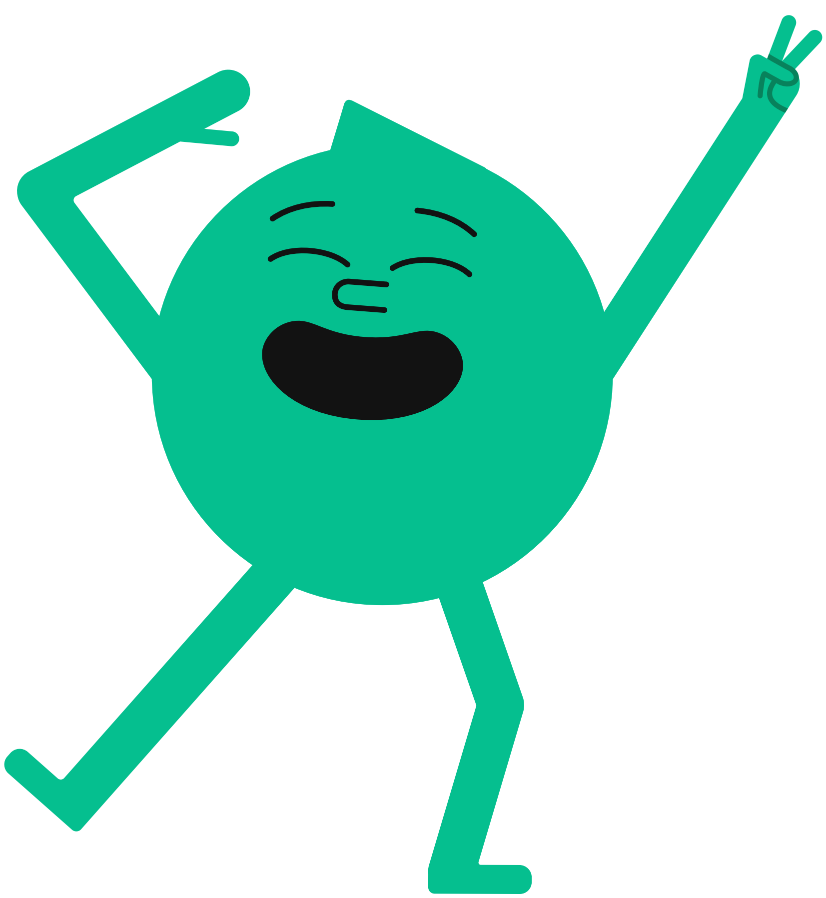
Réponse : Les côtés du **rectangle** sont représentés par les expressions **5x - 4** et **5x - 3**.

Explications

Afin de trouver les expressions qui correspondent aux côtés du quadrilatère, on doit factoriser le polynôme $25x^2-35x+12$. Plusieurs méthodes de factorisation sont possibles, alors allons-y avec le *produit-somme*.

Produit-somme
$25x^2 - 35x + 12$
$\text{Produit} = 25 \times 12 = 300$ $\text{Somme} = -35$
On prend -20 et -15.
$25x^2 - 20x - 15x + 12$ $5x(5x-4) - 3(5x-4)$ $(5x-4)(5x-3)$

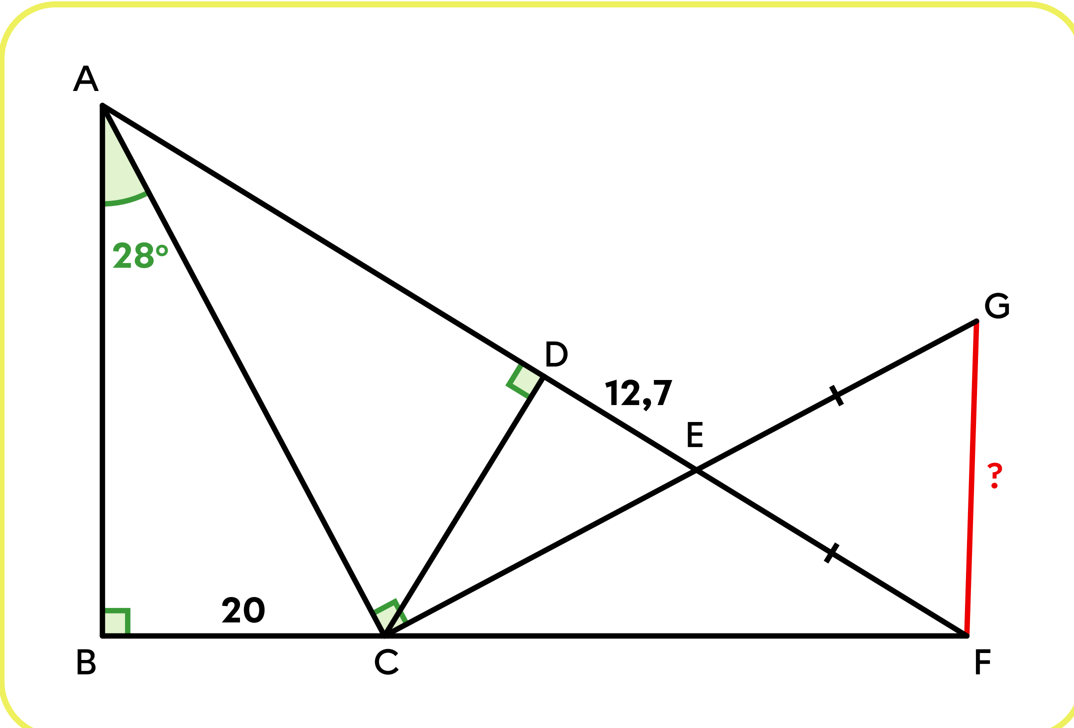
Puisque les 2 binômes ainsi obtenus sont différents pour toutes valeurs x, on en conclut que le quadrilatère est un **rectangle** dont les côtés sont 5x-4 et 5x-3.



Section C

Question 5

Quelle est la mesure du segment $\overline{\mathrm{FG}}$?



Plusieurs démarches sont possibles. En voici une.

1. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{AC}}$

$$\sin(A) = \frac{\mathrm{m}BC}{\mathrm{m}\overline{AC}}$$
$$\sin(28°) = \frac{20}{\mathrm{m}\overline{AC}}$$
$$\mathrm{m}\overline{AC} = \frac{20}{\sin(28°)}$$
$$\mathrm{m}\overline{AC} \approx 42{,}6$$

2. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{AD}}$

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), chaque cathète ($\overline{\mathrm{AC}}$) est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse ($\overline{\mathrm{AD}}$) et l'hypoténuse entière ($\overline{\mathrm{AE}}$).

   Posons $x = \mathrm{m}\overline{AD}$.

$$\frac{\mathrm{m}\overline{AD}}{\mathrm{m}\overline{AC}} = \frac{\mathrm{m}\overline{AC}}{\mathrm{m}\overline{AE}}$$

$$\begin{aligned} m\overline{AC}^2 &= m\overline{AD} \times m\overline{AE} \\ 42{,}6^2 &= x \times (x + 12{,}7) \\ 1\ 814{,}76 &= x^2 + 12{,}7x \\ 0 &= x^2 + 12{,}7 - 1\ 814{,}76 \end{aligned}$$

On utilise ensuite la formule quadratique.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-12{,}7 \pm \sqrt{12{,}7^2 - 4(1)(-1\ 814{,}76)}}{2(1)} \end{aligned}$$

$$x_1 \approx 36{,}72 \qquad x_2 \approx -49{,}42$$

x_2 est rejeté, car une mesure de segment ne peut pas être négative.
Ainsi, le segment $\overline{\mathrm{AD}}$ mesure environ 36,72 unités.

3. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{CD}}$

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), la hauteur issue de l'angle droit ($\overline{\mathrm{CD}}$) est moyenne proportionnelle entre les 2 segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse ($\overline{\mathrm{AD}}$ et $\overline{\mathrm{DE}}$).

$$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{CD}} = \frac{m\overline{CD}}{m\overline{DE}}$$

$$\begin{aligned} m\overline{CD}^2 &= m\overline{AD} \times m\overline{DE} \\ m\overline{CD} &= \sqrt{36{,}72 \times 12{,}7} \\ m\overline{CD} &\approx 21{,}59 \end{aligned}$$

4. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{CE}}$

   Dans un triangle rectangle (ΔACE), le produit de l'hypoténuse ($\overline{\mathrm{AE}}$) et de la hauteur correspondante ($\overline{\mathrm{CD}}$) est égal au produit des cathètes ($\overline{\mathrm{AC}}$ et $\overline{\mathrm{CE}}$).

$$\begin{aligned} m\overline{AE} \times m\overline{CD} &= m\overline{AC} \times m\overline{CE} \\ \left(m\overline{AD} + m\overline{DE}\right) \times m\overline{CD} &= m\overline{AC} \times m\overline{CE} \\ (36{,}72 + 12{,}7) \times 21{,}59 &= 42{,}6 \times m\overline{CE} \\ m\overline{CE} &= \frac{49{,}42 \times 21{,}59}{42{,}6} \\ m\overline{CE} &\approx 25{,}05 \end{aligned}$$

5. Calculer la mesure des angles DEC, ACB, ECF, CEF, CFE et GEF

Le triangle DEC étant rectangle en D, on peut utiliser un rapport trigonométrique.

$$\begin{aligned}\tan(\angle DEC) &= \frac{\mathrm{m}\overline{CD}}{\mathrm{m}\overline{DE}}\\ &= \frac{21{,}59}{12{,}7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle DEC &= \tan^{-1}\left(\frac{21{,}59}{12{,}7}\right)\\ &\approx 59{,}5^\circ\end{aligned}$$

Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°, on peut trouver la mesure de l'angle ACB.

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle ACB &= 180^\circ - \mathrm{m}\angle ABC - \mathrm{m}\angle CAB\\ \mathrm{m}\angle ACB &= 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ\\ \mathrm{m}\angle ACB &= 62^\circ\end{aligned}$$

Comme les angles ACB, ACE et ECF forment un angle plat (180°), on peut trouver la mesure de l'angle ECF.

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle ECF &= 180^\circ - \mathrm{m}\angle ACB - \mathrm{m}\angle ACE\\ \mathrm{m}\angle ECF &= 180^\circ - 62^\circ - 90^\circ\\ \mathrm{m}\angle ECF &= 28^\circ\end{aligned}$$

Les angles DEC et CEF forment aussi un angle plat.

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle CEF &= 180^\circ - \mathrm{m}\angle DEC\\ &= 180^\circ - 59{,}5^\circ\\ &= 120{,}5^\circ\end{aligned}$$

Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°, on peut trouver la mesure de l'angle CFE.

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle CFE &= 180^\circ - \mathrm{m}\angle CEF - \mathrm{m}\angle ECF\\ &= 180^\circ - 120{,}5^\circ - 28^\circ\\ &= 31{,}5^\circ\end{aligned}$$

Comme les angles DEC et GEF sont opposés par le sommet, ils sont isométriques.

$$\mathrm{m}\angle GEF = \mathrm{m}\angle DEC = 59{,}5^\circ$$

6. Calculer la mesure des segments $\overline{\mathrm{EF}}$ et $\overline{\mathrm{EG}}$

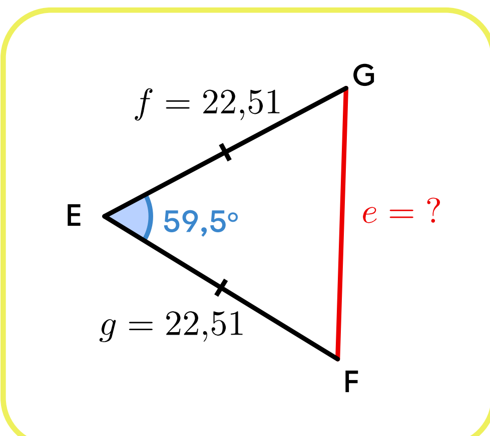
   On utilise la loi des sinus dans le triangle CEF.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{m}EF}{\sin(\angle ECF)} &= \frac{\mathrm{m}CE}{\sin(\angle CFE)}\\
\frac{\mathrm{m}\overline{EF}}{\sin(28°)} &= \frac{25{,}05}{\sin(31{,}5°)}\\
\mathrm{m}\overline{EF} &= \frac{25{,}05 \times \sin(28°)}{\sin(31{,}5°)}\\
&\approx 22{,}51
\end{aligned}$$

   Ainsi, le segment $\overline{\mathrm{EG}}$ mesure également 22,51 unités puisqu'il est indiqué sur la figure que $\overline{\mathrm{EF}}$ et $\overline{\mathrm{EG}}$ sont isométriques.

7. Calculer la mesure du segment $\overline{\mathrm{FG}}$

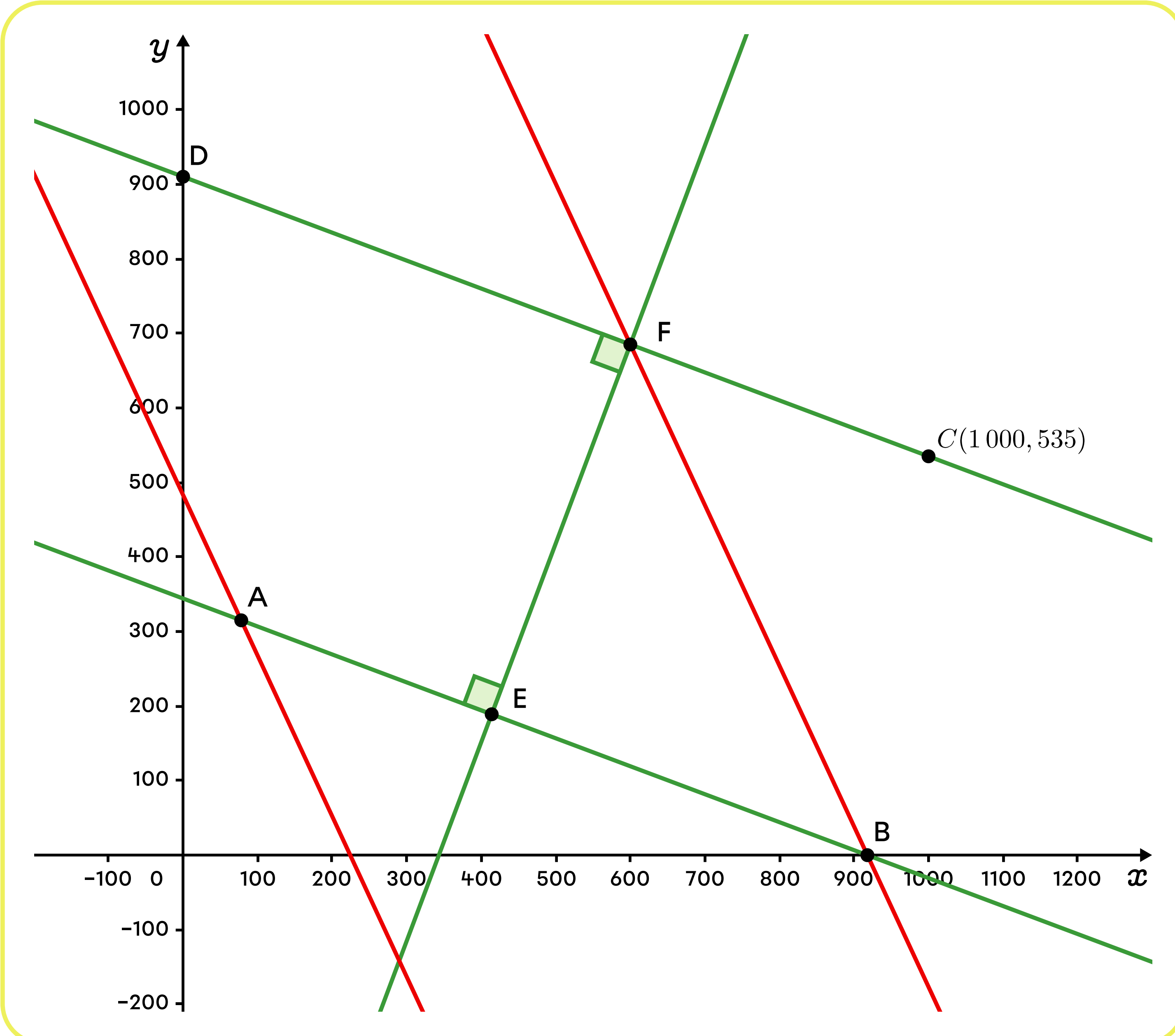
   On utilise la loi des cosinus dans le triangle GEF.



$$\begin{aligned}
e^2 &= f^2 + g^2 - 2fg\cos(E)\\
\mathrm{m}\overline{FG}^2 &= 22{,}51^2 + 22{,}51^2 - 2(22{,}51)(22{,}51)\cos(59{,}5°)\\
\mathrm{m}\overline{FG} &= \sqrt{499{,}06}\\
&\approx 22{,}34
\end{aligned}$$

Réponse : Le segment $\overline{\mathrm{FG}}$ mesure environ **22,34** unités.

Question 6



Deux trajets permettent d'aller du point B au point D : le trajet BFD et le trajet BEFD. Afin de déterminer le trajet le plus rapide, il faut calculer la longueur, puis la durée de chaque trajet en tenant compte des limites de vitesse. Pour y arriver, il faut d'abord déterminer les coordonnées de chaque point du graphique.

1. Déterminer les coordonnées des points

a) Trouver les coordonnées du point A

Dans la règle de la droite AB, on remplace x par 78 et on isole y.

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{x} + 8y &= 2\ 754 \\ 3(\mathbf{78}) + 8y &= 2\ 754 \\ 234 + 8y &= 2\ 754 \\ 8y &= 2\ 520 \\ y &= 315 \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du point A sont (78, 315).

b) Trouver les coordonnées du point B

Puisque B est situé sur l'axe des x, son ordonnée vaut 0.

$$\begin{aligned} 3x + 8\boldsymbol{y} &= 2\ 754 \\ 3x + 8(\mathbf{0}) &= 2\ 754 \\ 3x &= 2\ 754 \\ x &= 918 \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du point B sont (918, 0).

c) Trouver les coordonnées du point E

L'ordonnée de A est de 315. Puisque l'ordonnée du point E vaut les 3 cinquièmes de celle du point A, on remplace y par $\frac{3}{5} \times 315 = 189$ dans la règle de la droite AB.

$$\begin{aligned} 3x + 8\boldsymbol{y} &= 2\ 754 \\ 3x + 8(\mathbf{189}) &= 2\ 754 \\ 3x + 1\ 512 &= 2\ 754 \\ 3x &= 1\ 242 \\ x &= 414 \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du point E sont (414, 189).

d) Déterminer la pente de la droite AB

Il suffit de transformer la règle de la droite AB de la forme générale à la forme canonique.

$$3x + 8y = 2\ 754$$
$$8y = -3x + 2\ 754$$
$$y = -\frac{3}{8}x + 344{,}25$$

Ainsi, la pente de la droite AB vaut $-\frac{3}{8}$.

e) Calculer la règle de la droite EF

Comme les droites EF et AB sont perpendiculaires, la pente de EF est l'opposé de l'inverse de celle de AB. Autrement dit, le produit de leurs pentes vaut -1.

$$a_{AB} \times a_{EF} = -1$$
$$a_{EF} = \frac{-1}{a_{AB}}$$
$$a_{EF} = \frac{-1}{-\frac{3}{8}}$$
$$a_{EF} = \frac{8}{3}$$

En utilisant la pente de EF et les coordonnées du point E, on trouve la règle de la droite EF.

$$y = ax + b$$
$$y = \frac{8}{3}x + b$$
$$189 = \frac{8}{3}(414) + b$$
$$189 = 1\ 104 + b$$
$$-915 = b$$

Ainsi, la règle de la droite EF est : $y = \frac{8}{3}x - 915$.

f) Déterminer la règle de la droite CD et les coordonnées du point D

Comme les droites AB et CD sont toutes les 2 perpendiculaires à la droite EF, elles sont parallèles entre elles. Par conséquent, AB et CD ont la même pente.

$$a_{AB} = a_{CD} = -\frac{3}{8}$$

En utilisant la pente de CD et les coordonnées du point C, on trouve la règle de la droite CD.

$$y = ax + b$$
$$y = -\frac{3}{8}x + b$$
$$535 = -\frac{3}{8}(1\,000) + b$$
$$535 = -375 + b$$
$$910 = b$$

Ainsi, la règle de la droite CD est : $y = -\frac{3}{8}x + 910$.

→ L'ordonnée à l'origine de la droite CD, correspond à l'ordonnée du point D étant donné que D est situé sur l'axe des y. Ainsi, les coordonnées de D sont (0, 910).

g) Calculer la règle de la droite EF

Le point F est situé à l'intersection des droites CD et EF. Pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on utilise la méthode de comparaison.

$$y_{CD} = y_{EF}$$
$$-\frac{3}{8}x + 910 = \frac{8}{3}x - 915$$
$$910 + 915 = \frac{8}{3}x + \frac{3}{8}x$$
$$1\ 825 = \frac{73}{24}x$$
$$600 = x$$

On remplace x par 600 dans la règle de la droite CD pour trouver l'ordonnée du point F.

$$y = -\frac{3}{8}x + 910$$
$$y = -\frac{3}{8}(600) + 910$$
$$y = 685$$

Ainsi, les coordonnées du point F sont : (600, 685).

Remarque : Il est également possible de remplacer x par 600 dans la règle de la droite EF.

2. Calculer les mesures des segments BE, BF, EF et DF

   On utilise la formule de distance entre 2 points.

$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
$\text{dist}(B, E) = \sqrt{(414 - 918)^2 + (189 - 0)^2}$ $\text{m}\overline{BE} \approx 538{,}27 \text{ m}$	$\text{dist}(E, F) = \sqrt{(600 - 414)^2 + (685 - 189)^2}$ $\text{m}\overline{EF} \approx 529{,}73 \text{ m}$
$\text{dist}(B, F) = \sqrt{(600 - 918)^2 + (685 - 0)^2}$ $\text{m}\overline{BF} \approx 755{,}21 \text{ m}$	$\text{dist}(D, F) = \sqrt{(600 - 0)^2 + (685 - 910)^2}$ $\text{m}\overline{DF} \approx 640{,}80 \text{ m}$

3. Déterminer les coordonnées des points

   Pour calculer la durée de chaque trajet, il faut utiliser la formule de la vitesse qui est fournie.

$$\text{Vitesse} = \frac{\text{Distance}}{\text{Temps}} \iff \text{Temps} = \frac{\text{Distance}}{\text{Vitesse}}$$

   Les trajets possibles sont B → F → D et B → E → F → D.

   a) Pour le trajet B → F → D, il faut considérer que le segment BF est limité à 30 km/h et que le segment FD est limité à 50 km/h. Toutes les distances calculées précédemment sont en mètres (m), donc il faut les convertir en kilomètres (km).

$$\begin{aligned}
\text{Temps} &= \frac{\text{distance}(B, F)}{\text{vitesse}(B, F)} + \frac{\text{distance}(F, D)}{\text{vitesse}(F, D)} \\
&= \frac{0{,}755\,21 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} + \frac{0{,}640\,80 \text{ km}}{50 \text{ km/h}} \\
&\approx 0{,}038 \text{ h} \\
&\approx 136{,}76 \text{ s}
\end{aligned}$$

b) Pour le trajet B → E → F → D, la vitesse est limitée à 50 km/h.

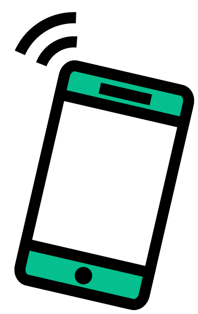
$$\begin{aligned}\text{Temps} &= \frac{\text{distance totale}}{\text{vitesse}}\\ &= \frac{(0{,}538\,27 + 0{,}529\,73 + 0{,}640\,80)\ \text{km}}{50\ \text{km/h}}\\ &= \frac{1{,}708\,80\ \text{km}}{50\ \text{km/h}}\\ &\approx 0{,}034\ \text{h}\\ &\approx 123{,}03\ \text{s}\end{aligned}$$

Conclusion : Même si le trajet B → E → F → D est plus long (en distance) que le trajet B → F → D, il faut environ 13,73 s de moins pour le parcourir.

Remarque : Comme discuté dans la grande révision, cette mise en situation aurait pu être une **démonstration** ou une **conjecture**. Dans tous les cas, il faut faire la même démarche. C'est juste la conclusion qui change. Pour plus d'informations sur les conjectures et les démonstrations, consulte les fiches suivantes.

Les démonstrations

Les conjectures



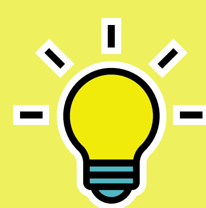
Question 7

Indice : La consigne pourrait être reformulée de la façon suivante. À partir des paramètres a et b de la fonction f(x), comment peut-on trouver la règle de la fonction g(x)?

Lorsqu'on doit émettre une conjecture, il faut analyser au moins 3 cas. En général, on analyse le premier cas qui est fourni, puis on invente 2 autres cas.

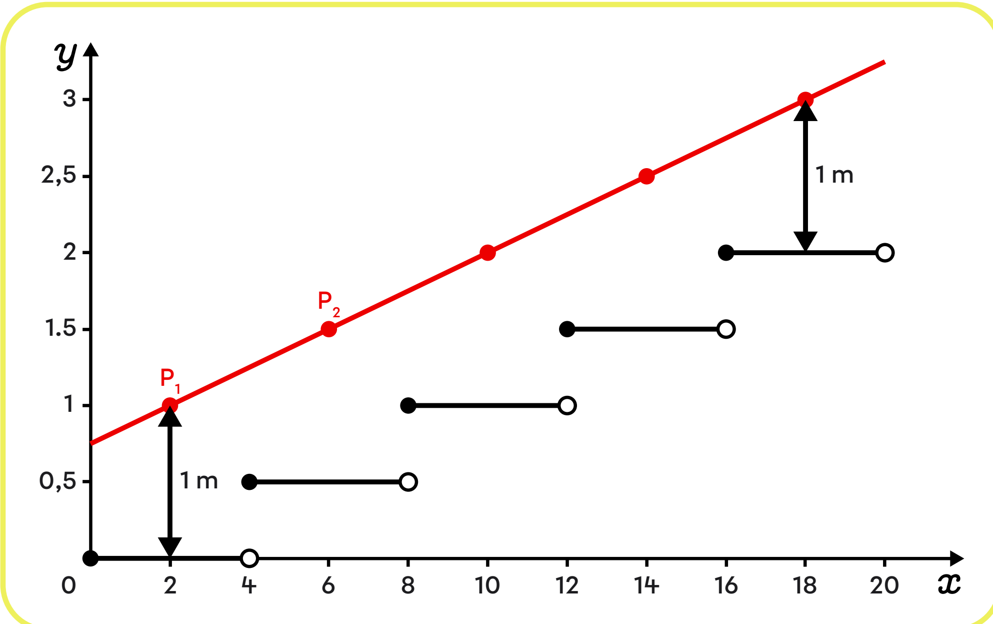
Conseils et Astuces

Il faut faire des exemples variés. Choisis des nombres entiers, des nombres décimaux, des fractions, des nombres positifs, négatifs, etc. Si, par exemple, tu ne prends que des nombres entiers positifs, tu risques de ne pas trouver une conjecture suffisamment précise.



1er cas : Les paramètres a et b sont positifs.
2^{e} cas : Les paramètres a et b sont négatifs.
3^{e} cas : Le paramètre a est négatif et le paramètre b est positif.

1er cas : Paramètres a et b positifs



1. Déterminer la valeur des paramètres a et b de l'escalier.
   → La hauteur de chaque contremarche est de 0,5 m. Ainsi, |a| = 0,5.
   → La longueur de chaque marche est de 4 m. Ainsi, |b|= $\frac{1}{4}$ =0,25.
   → L'escalier est croissant et chaque marche commence par un point plein.
   Ainsi, a et b sont positifs.

   En résumé, la règle est f(x) = 0,5[0,25x].

2. Déterminer la règle de la rampe (g(x)).

   a) Pour déterminer la règle de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
      → Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 4. Donc, les coordonnées de P_1 sont (2, 1).
      → Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2^{e} marche, qui va de 4 à 8 à une hauteur de 0,5 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (6; 1,5).

   b) On calcule la pente (m).

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{1{,}5 - 1}{6 - 2} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

c) On détermine l'ordonnée à l'origine (k).

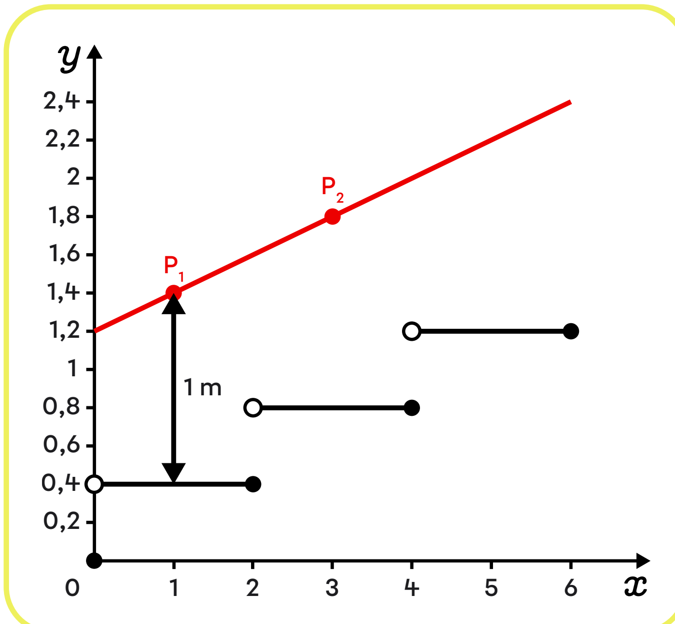
$$g(x) = mx + k$$
$$g(x) = \frac{1}{8}x + k$$
$$1 = \frac{1}{8}(2) + k$$
$$\frac{3}{4} = k$$

Ainsi, la règle est $g(x) = \frac{1}{8}x + \frac{3}{4}$.

2e cas : Paramètres a et b négatifs

1. Choisir la règle de l'escalier (f(x)).

   Je choisis de faire un escalier **croissant** avec les paramètres **a et b négatifs**. Je vais donc prendre les valeurs suivantes.
   → En choisissant a = -0,4, chaque contremarche sera de 0,4 m.
   → En choisissant b = -0,5, chaque marche aura une longueur de $\frac{1}{0{,}5}$ = 2 m.
   → Comme les paramètres a et b choisis sont négatifs, l'escalier sera croissant et chaque marche commencera par un point vide.
   → Ainsi, la règle choisie est $f(x) = -0{,}4[-0{,}5x]$ et son graphique est le suivant.



2. Déterminer la règle de la rampe (g(x)).

   a) Pour déterminer la règle de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
      → Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 2 à une hauteur de 0,4 m. Donc, les coordonnées de P_1 sont (1; 1,4).
      → Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2e marche, qui va de 2 à 4 à une hauteur de 0,8 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (3; 1,8).

   b) On calcule la pente (m).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1{,}8 - 1{,}4}{3 - 1} \\ &= 0{,}2 \end{aligned}$$

   c) On détermine l'ordonnée à l'origine (k).

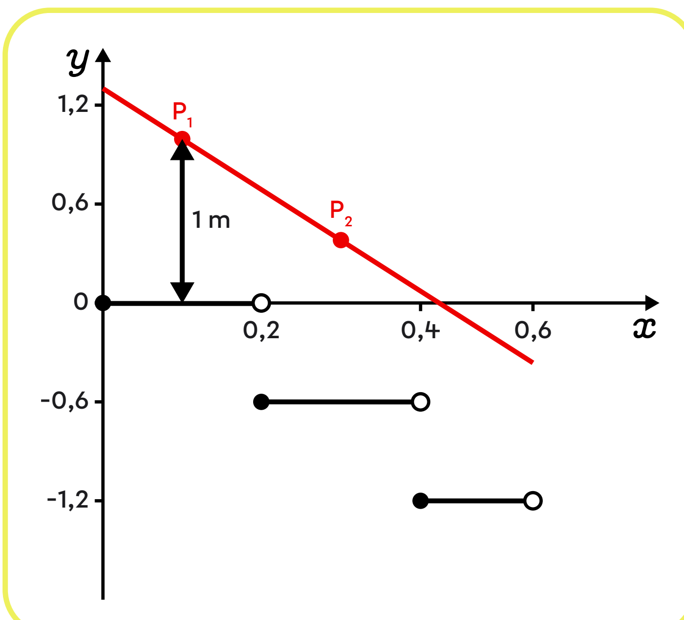
$$\begin{aligned} g(x) &= mx + k \\ g(x) &= 0{,}2x + k \\ 1{,}4 &= 0{,}2(1) + k \\ 1{,}2 &= k \end{aligned}$$

   Ainsi, la règle est $\mathrm{g(x)} = 0{,}2\mathrm{x} + 1{,}2$.

3e cas : Paramètre a négatif et b positif

1. Choisir la règle de l'escalier (f(x)).

   Je choisis de faire un escalier **décroissant** avec le paramètre a négatif.
   Je vais prendre les valeurs suivantes.
   → En choisissant a = -0,6, chaque contremarche sera de 0,6 m.
   → En choisissant b = 5, chaque marche aura une longueur de $\frac{1}{5}$ = 0,2 m.
   → Comme a est négatif et b est positif, l'escalier sera décroissant et chaque marche commencera par un point plein.
   Ainsi, la règle choisie est f(x)=-0,6[5x] et son graphique est le suivant.



2. Déterminer la règle de la rampe (g(x)).

   a) Pour déterminer la règle de la rampe, il nous faut 2 points sur la droite.
   → Le point P_1 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 1re marche, qui va de 0 à 0,2 à une hauteur de 0 m. Donc, les coordonnées de P_1 sont (0,1; 1).
   → Le point P_2 est 1 m au-dessus du point-milieu de la 2e marche, qui va de 0,2 à 0,4 à une hauteur de -0,6 m. Donc, les coordonnées de P_2 sont (0,3; 0,4).

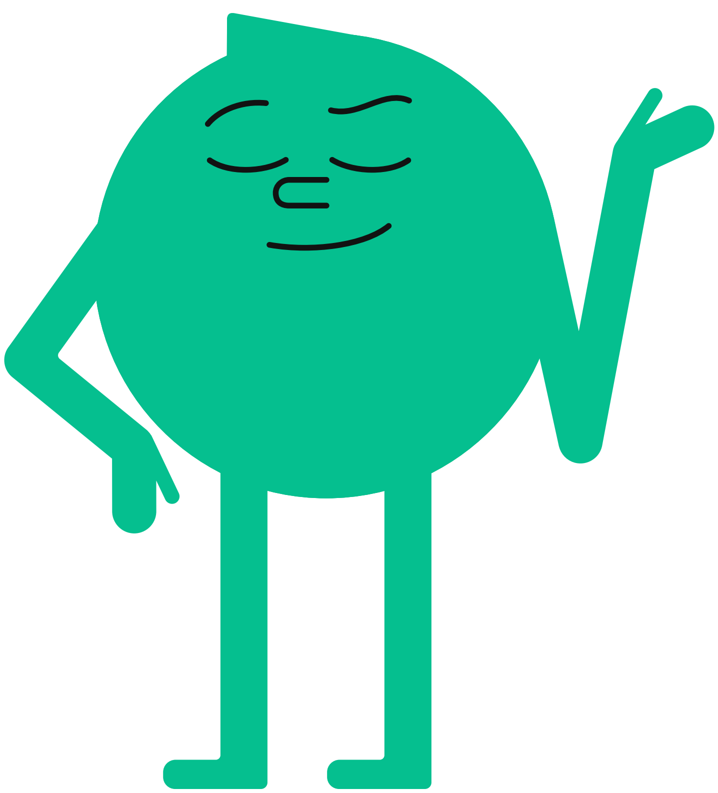
   b) On calcule la pente (m).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0{,}4 - 1}{0{,}3 - 0{,}1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

   c) On détermine l'ordonnée à l'origine (k).

$$\begin{aligned} g(x) &= mx + k \\ g(x) &= -3x + k \\ 1 &= -3(0{,}1) + k \\ 1{,}3 &= k \end{aligned}$$

   Ainsi, la règle est $g(x) = -3x + 1{,}3$.



Recherche des liens

Conseils et astuces

Il est souvent préférable de travailler avec des fractions pour mieux voir les liens. Par exemple, il est plus facile de voir que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ que de voir que $0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}125$.

1er cas	$a = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$ $b = 0{,}25 = \dfrac{1}{4}$	$m = \dfrac{1}{8}$ $k = \dfrac{3}{4}$
2e cas	$a = -0{,}4 = -\dfrac{2}{5}$ $b = -0{,}5 = -\dfrac{1}{2}$	$m = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$ $k = 1{,}2 = \dfrac{6}{5}$
3e cas	$a = -0{,}6 = -\dfrac{3}{5}$ $b = 5$	$m = -3$ $k = 1{,}3 = \dfrac{13}{10}$

Trouver les liens, ça signifie qu'on doit se poser les questions suivantes.

- **Pour *m***
  - Comment obtenir $\frac{1}{8}$ à l'aide de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$?
  - Comment obtenir $\frac{1}{5}$ à l'aide de $-\frac{2}{5}$ et $-\frac{1}{2}$?
  - Comment obtenir -3 à l'aide de $-\frac{3}{5}$ et 5?
- **Pour *k***
  - Comment obtenir $\frac{3}{4}$ à l'aide de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ (sans oublier le 1 m)?
  - Comment obtenir 1,2 à l'aide de -0,4 et -0,5 (sans oublier le 1 m)?
  - Comment obtenir 1,3 à l'aide de -0,6 et 5 (sans oublier le 1 m)?

Conseils et Astuces

- Essaie d'abord les opérations de base (addition, soustraction, multiplication et division).

Exemples

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✓ $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{8}$ ✗

Il faut vérifier si **le lien trouvé** fonctionne aussi dans les 2 autres cas.

- Essaie d'utiliser un seul des paramètre à la fois.

Exemples

	Avec le paramètre **b**	Avec le paramètre **a**
1[er] cas	$1 - b = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = k$ ✓	$1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = k$ ✓
2[e] cas	$1 - b = 1 - (-0{,}5) = 1{,}5 \neq k$ ✗	$1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2} \times -0{,}4 = 1{,}2 = k$ ✓

- Analyse le graphique et fais appel à tes connaissances mathématiques.

Exemples

- L'ordonnée à l'origine d'une fonction affine (**k**) est associée à l'échelle *verticale*, tout comme le paramètre **a** d'une fonction partie entière.
- Pour déterminer le paramètre **k**, il faut aussi tenir compte de la hauteur de la rampe par rapport au milieu de la marche (**1 m**).

Voici les liens appropriés.

- **Pour *m***
  Dans tous les cas, si je multiplie les paramètres a et b ensemble, j'obtiens le paramètre m.
  - 1^er^ cas : $ab = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = m$
  - 2^e^ cas : $ab = -0{,}4 \times -0{,}5 = 0{,}2 = m$
  - 3^e^ cas : $ab = -\frac{3}{5} \times 5 = -3 = m$

  Je me suis assuré que ça fonctionnait aussi bien dans tous les cas, soit avec a et b positifs, négatifs ou de signes contraires.

- **Pour *k***
  Dans les 3 cas, si j'enlève la moitié de la valeur du paramètre a à la hauteur de 1 m, j'obtiens k.
  - 1^er^ cas : $1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = k$
  - 2^e^ cas : $1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2}(-0{,}4) = 1 - (-0{,}2) = 1{,}2 = k$
  - 3^e^ cas : $1 - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2}(-0{,}6) = 1 - (-0{,}3) = 1{,}3 = k$

On est prêt à formuler la réponse complète.

Conseils et astuces

- Il faut donner la réponse, c'est-à-dire sa conjecture, à l'aide de phrases complètes. Autrement dit, « $m = a \times b$ » et « $k = 1 - \frac{1}{2}a$ » n'est pas la réponse attendue, même s'il est permis de l'ajouter à sa conjecture.
- Il est préférable de donner un lien qui ne fonctionne pas dans tous les cas que de n'en donner aucun.

Réponse

- La pente m de la fonction g(x) est égale au produit des paramètres a et b de la fonction f(x), et ce, peu importe le signe de a et de b.

  Sous forme algébrique : $m = a \times b$

- L'ordonnée à l'origine k de la fonction g(x) s'obtient en soustrayant la moitié de la valeur de a à 1 m.

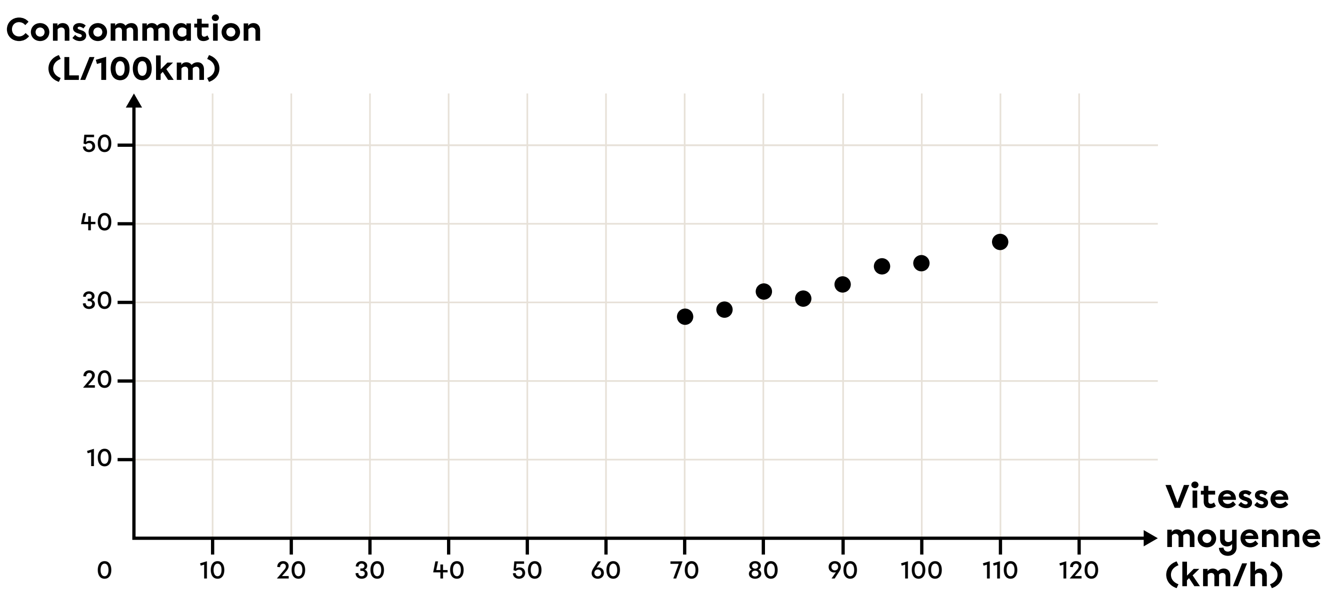
  Sous forme algébrique : $k = 1 - \frac{1}{2}a$

Question 8

Voici les principales étapes de la résolution du problème : on doit déterminer l'équation de la droite de régression pour les données de la flotte MétaCargo, puis trouver la règle de la consommation de carburant en fonction de la vitesse moyenne pour la flotte NovaFret. Ensuite, on doit analyser, pour différentes vitesses, quelle flotte de camions offre la consommation de carburant la plus faible.

A. Commençons par la flotte **MétaCargo**.

On trace le nuage de points pour voir s'il y a une corrélation entre les variables ou non.



On observe bel et bien une corrélation positive entre les variables : plus la vitesse moyenne d'un camion est élevée et plus sa consommation d'essence augmente

On va donc trouver la règle de la droite de régression. On peut utiliser la méthode de Mayer ou la méthode médiane-médiane. Prenons celle de **Mayer**.

1. Ordonner les coordonnées selon la variable indépendante. C'est déjà le cas.

x : Vitesse moyenne (km/h)	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**95**	**100**	**110**
y : Consommation (L/100 km)	28,2	29,1	31,4	30,5	32,3	34,6	35,0	37,7

2. Séparer la distribution en 2 groupes égaux, si possible.

	1er groupe				2e groupe			
x : Vitesse moyenne (km/h)	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**95**	**100**	**110**
y : Consommation (L/100 km)	28,2	29,1	31,4	30,5	32,3	34,6	35,0	37,7

3. Calculer les **points moyens** de chaque groupe (P_1 et P_2).

	1er groupe	2e groupe
Moyenne des abscisses	$\overline{x}_1 = \dfrac{70+75+80+85}{4} = 77{,}5$	$\overline{x}_2 = \dfrac{90+95+100+110}{4} = 98{,}75$
Moyenne des ordonnées	$\overline{y}_1 = \dfrac{28{,}2+29{,}1+31{,}4+30{,}5}{4} = 29{,}8$	$\overline{y}_2 = \dfrac{32{,}3+34{,}6+35{,}0+37{,}7}{4} = 34{,}9$
Point moyen	P_1 (77,5; 29,8)	P_2 (98,75; 34,9)

4. Trouver la règle de la droite de régression (y = ax + b) passant par les points P_1 et P_2.

a) Calculer la pente (a).

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{34{,}9 - 29{,}8}{98{,}75 - 77{,}5} \\ &= \frac{5{,}1}{21{,}25} \\ &= 0{,}24 \end{aligned}$$

Ainsi, $y = 0{,}24x + b$.

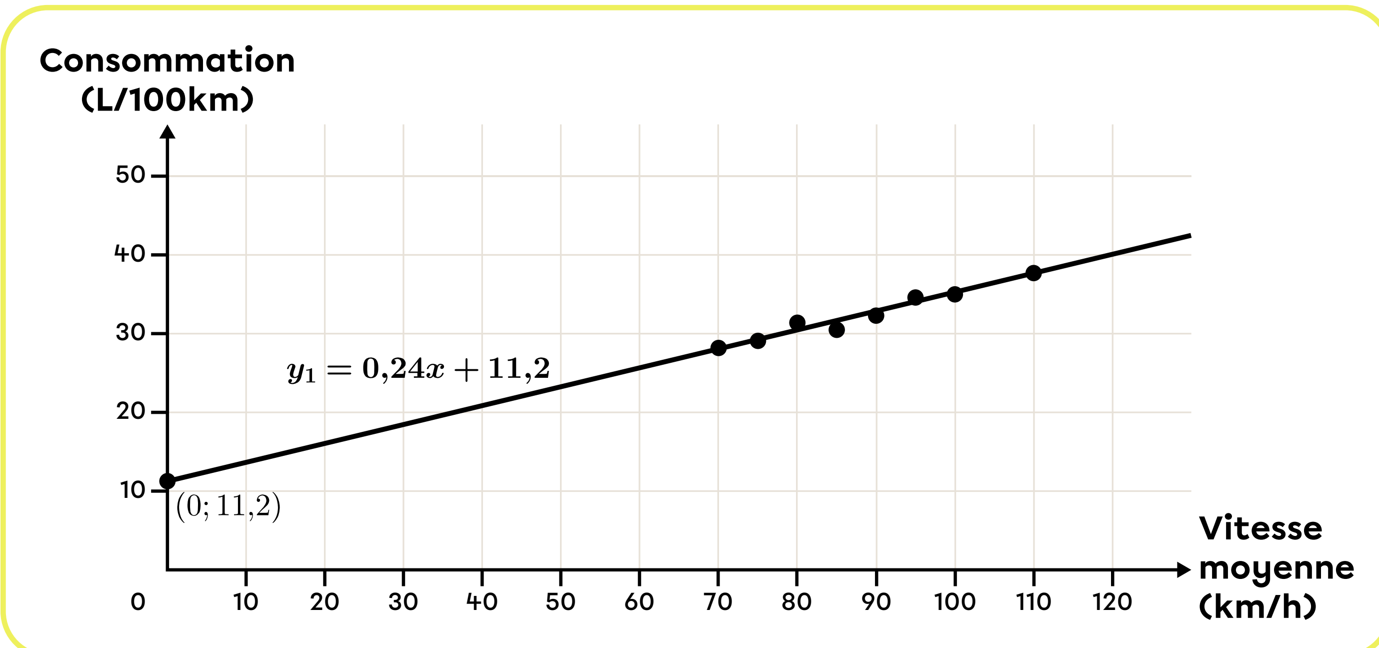
b) Calculer la valeur de b à l'aide du point P_1 (77,5; 29,8).

$$y = 0{,}24x + b$$
$$29{,}8 = 0{,}24(77{,}5) + b$$
$$11{,}2 = b$$

Ainsi, la règle de la droite de régression pour MétaCargo est : $y_1 = 0{,}24x + 11{,}2$.

Remarque : Si tu as utilisé la méthode médiane-médiane, tu devrais obtenir $y_1 = 0{,}236x + 11{,}18\overline{3}$.

On peut tracer la droite de régression dont l'ordonnée à l'origine est à 11,2 et qui passe au travers du nuage de points.



B. Maintenant, trouvons la règle de la fonction qui permet de calculer la consommation de carburant des camions **NovaFret**.

- On a le modèle : $y = ax^2 + k$.
- On a le point (0; 14,35).
- On a un autre point : (75; 25,6).

Dans la règle, on remplace x par 0 et y par 14,35.

$$y = ax^2 + k$$
$$14{,}35 = a(0)^2 + k$$
$$14{,}35 = k$$

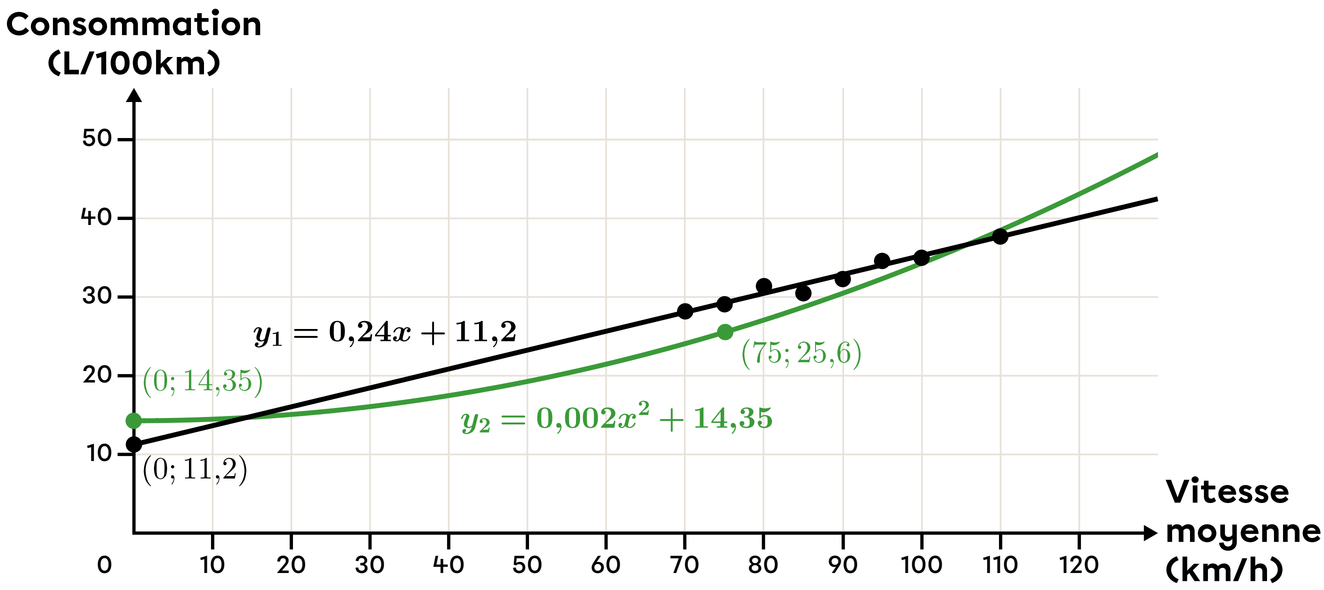
Comme h = 0, le point (0; 14,35) est le sommet de la parabole.
Avec le paramètre k, on peut maintenant calculer le paramètre a en remplaçant x par 75 et y par 25,6.

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + 14{,}35 \\
25{,}6 &= a(75)^2 + 14{,}35 \\
11{,}25 &= 5\ 625a \\
0{,}002 &= a
\end{aligned}
$$

Ainsi, la règle qui donne la consommation de carburant des camions de la flotte NovaFret (y_2) en fonction de la vitesse moyenne (x) en km/h est : $y_2 = 0{,}002x^2 + 14{,}35$.

On peut maintenant tracer la courbe de la fonction y_2 dans le même plan cartésien. On sait que...

- le sommet est situé à (0; 14,35),
- la parabole est ouverte vers le haut, car le paramètre a est positif,
- la parabole passe par le point (75; 25,6).



C. Pour conseiller adéquatement le président de la compagnie, il faut trouver à quelle(s) vitesse(s) moyenne(s) la consommation de carburant est la même pour les 2 flottes de camions. Il faut donc trouver les points où la droite et la courbe se croisent.

On peut utiliser la méthode de son choix : comparaison, substitution ou réduction. Comme la variable y est déjà isolée dans les 2 équations, prenons la méthode de comparaison.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_2 \\
0{,}24x + 11{,}2 &= 0{,}002x^2 + 14{,}35 \\
\frac{0}{0{,}002} &= \frac{0{,}002x^2 - 0{,}24x + 3{,}15}{0{,}002} \\
0 &= x^2 - 120x + 1\ 575
\end{aligned}
$$

Une fois que l'équation est égale à 0, on peut trouver les valeurs de x à l'aide de la formule quadratique ou de la factorisation. Ici, nous le ferons avec la **complétion du carré.**

$$0 = x^2 - 120x + \left(\frac{120}{2}\right)^2 - \left(\frac{120}{2}\right)^2 + 1\ 575$$

$$0 = (x^2 - 120x + 3\ 600) - 3\ 600 + 1\ 575$$

$$0 = (x^2 - 2(60)x + 60^2) - 2\ 025$$

$$0 = (x - 60)^2 - 45^2$$

$$0 = (x - 60 + 45)(x - 60 - 45)$$

$$0 = (x - 15)(x - 105)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$x_1 = 15 \quad x_2 = 105$$

Remarque : Si tu as trouvé la règle de y_1 à l'aide de la méthode médiane-médiane, tu devrais obtenir $x_1 \approx 115{,}44$ et $x_2 \approx 102{,}56$.

Ainsi, selon les données disponibles, les camions des 2 flottes ont la même consommation de carburant lorsque les vitesses moyennes sont de 15 km/h et de 105 km/h. Pour savoir ce qu'il se passe lorsque la vitesse est inférieure à 15 km/h, entre 15 et 105 km/h et supérieure à 105 km/h, on peut observer le graphique ou valider avec des valeurs dans chaque intervalle.

	MétaCargo	**NovaFret**
[0, 15[km/h → Prenons x = 10	$y_1 = 0{,}24x + 11{,}2$ $= 0{,}24(10) + 11{,}2$ $= 13{,}6 \text{ L}/100 \text{ km}$	$y_2 = 0{,}002x^2 + 14{,}35$ $= 0{,}002(10)^2 + 14{,}35$ $= 14{,}55 \text{ L}/100 \text{ km}$
15 km/h	14,8 L/100 km	
]15, 105[km/h → Prenons x = 100	$y_1 = 0{,}24x + 11{,}2$ $= 0{,}24(100) + 11{,}2$ $= 35{,}2 \text{ L}/100 \text{ km}$	$y_2 = 0{,}002x^2 + 14{,}35$ $= 0{,}002(100)^2 + 14{,}35$ $= 34{,}35 \text{ L}/100 \text{ km}$
105 km/h	36,4 L/100 km	
Plus de 105 km/h → Prenons x = 120	$y_1 = 0{,}24x + 11{,}2$ $= 0{,}24(120) + 11{,}2$ $= 40 \text{ L}/100 \text{ km}$	$y_2 = 0{,}002x^2 + 14{,}35$ $= 0{,}002(120)^2 + 14{,}35$ $= 43{,}15 \text{ L}/100 \text{ km}$

- Lorsque la vitesse est entre 15 et 105 km/h, c'est la fonction y_2, associée à la flotte NovaFret, qui affiche la consommation de carburant la plus basse.
- Finalement, lorsque les vitesses moyennes sont inférieures à 15 km/h ou supérieures à 105 km/h, ce sont les camions de MétaCargo qui offrent la consommation de carburant la plus avantageuse.

Réponse :

Voici les 2 façons de formuler la réponse.

- Si la vitesse moyenne sur un certain trajet est **entre 15 et 105 km/h**, il devrait prendre les camions de la flotte **MétaCargo**. Sinon, il doit choisir ceux de la flotte **NovaFret**.
- Si la vitesse moyenne sur un certain trajet est **inférieure à 15 km/h ou supérieure à 105 km/h**, il devrait prendre les camions de la flotte **NovaFret**. Sinon, il doit choisir ceux de la flotte **MétaCargo**.